ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2008, Volume: 3, Number: 4
Article Number: A0110

NATURAL AND APPLIED SCIENCES
MATHEMATIC
❖ **APPLIED MATHEMATIC**
Received: February 2008
Accepted: September 2008
© 2008 www.newwsa.com

Mustafa Aydoğdu
University of Firat
muaydogdu@firat.edu.tr
Elazig-Turkiye

MİNİMUM ENERJİ İLE LİNEER SİSTEMDE OPTİMAL KONTROL ETMEK

ÖZET

Bu çalışmada, minimum enerji ile lineer sistemde optimal kontrol etmek problemi matrisler ve lineer denklem sistemleri yardımıyla çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Minimum Enerji, Matris, Lineer Denklem Sistemleri, Hiper Düzlem, Hilbert Uzayı

THE CONTROL OPTIMAL IN LINEAR SYSTEM WITH MINIMUM ENERGY

ABSTRACT

In this study, minimum energy and in linear system to control optimal problem has been solved by matrices and linear equation systems.

Keywords: Minimum Energy, Matrices, Linear Equation Systems, Hyper Plane, Hilbert Space

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Kontrol edilebilen işlem aşağıdaki denklem ile tanımlansın.

X(n+1)=A(n)x(n)+B(n)y(n)+f(n), $(0 \le n \le N)$ (1)

Burada x(n)=(x_1(n),...,x_m(n)) m-boyutlu vektör, A(n) mxm-boyutlu, B(n) mxr-boyutlu matrislerdir. y(n)=(y_1(n),...,y_r(n)) r-boyutlu kontrol vektörü, f(n)=(f(n),...,f_m(n)) dış kuvvetler vektörü ve f(n)$\in l_2^m(0,N)$, $n=\{0,1,2,\dots,N-1,N\}$. N verilen bir doğal sayıdır.

Kabul edelim ki herhangi bir y=y(n)$\in l_2^r$ fonksiyonu kontrol fonksiyonu olsun. Böyle bir fonksiyon aşağıdaki şartı sağlamalıdır.

$$\|y\|_{l_2^r}^2=\sum_{n=0}^{N}\|y(n)\|_{E^r}^2=\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{r}y_i^2(n)<\infty, \quad (2)$$

T(n,K) matrisi (1) denklemine uygun homojen denklemin temel matrisi ve T(n,n)=I (I birim matristir). T(n,K) temel matrisi bu formda tanımlanan bir matris olmak üzere $z^1(n),\dots,z^m(n)$ fonksiyonları, lineer homojen sistemin,

Z(n+1)=A(n)z(n) (3)

m lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Bu çözümlerden aşağıdaki matris yazılabilir.

$$W(n)=\begin{bmatrix} z_1^1(n) & \cdots & z_1^m(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m^1(n) & \cdots & z_m^m(n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Burada "K." sütunların elemanları $z^k(n)$ vektörünün bileşenleridir. Burada ispat edilebilir ki

T(n,K)=W(n)$W^{-1}(K)$ (5)

dır ve $W^{-1}(K)$ matrisi (4) matrisinin tersidir. Eğer (3) sistemindeki A matrisi n den bağımsız ise, yani sabit ise, (5) matrisi,

T(n,K)=A^{n-k} (6)

matrisine dönüşür. (1) denkleminin

X(0)=x^0 (7)

başlangıç şartını sağlayan çözümü aşağıdaki gibi yazabilir:

$$X(n)=T(n,0)x^0+\sum_{K=1}^{n}T(n,K)[B(K-1)y(K-1)+f(K-1)] \quad (8)$$

Kabul edelim ki (7) şartındaki x^0 ve x^n, E^n Öklid uzayında verilmiş vektörlerdir. (2) şartını sağlayan y=y(n)$\in l_2^r(0,N)$ fonksiyonlarından öyle bir y=$y^0(n)$kontrol fonksiyonu bulacağız ki, ona uygun olan (1) ve (7) denklemini sağlayan x(n) çözümü

X(N)=X^N (9)

şartını da sağlasın ve y=$y^0(n)$ fonksiyonunda aşağıdaki fonksiyonel,

I=$\|y\|_{l_2^r(0,N)}^2$ (10)

minimum değerine sahip olsun.

Şimdi bu problemi çözelim:

Bunun için (8) ifadesini(9) da yerine yazarsak,

$$\sum_{K=1}^{N}T(N,K)B(K-1)y(K-1)=C \quad (11)$$

denklemi elde edilir. Buradan,

$$C=X^N-T(N,0)x^0-\sum_{K=1}^{N}T(N,K)f(K-1) \quad (12)$$

T(N,K)B(K-1) matrisinin i.satırının elemanlarından oluşan vektörü $h_i(n)$ sembolü ile gösterelim. O zaman (11) şartı

$\langle h_i,y\rangle=C_i \quad (i=1,2,\dots,m)$ (13)

şartına dönüşür. (13) ün sol tarafındaki sembol $l_2^r(0,N)$ uzayının elemanlarının iç çarpımıdır. Yani a(n),b(n) $\in l_2^r(0,N)$ ise

$$\langle a,b\rangle = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{r} a_i(n) b_i(n) \qquad (14)$$

dir.

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICATION)

Bu çalışma, minimum enerji ile lineer sistemde optimal kontrol etmek amacıyla hazırlanmıştır. Minimal enerji ile optimal kontrol etmek problemi aşağıdaki şekilde tanımlanıp, matrisler ve lineer denklem sistemlerinin çözüm metodu ile çözülecektir. Çalışma bundan sonra benzer konularda yapılacak olan diğer çalışmalara örnek olması açısından önem arzetmektedir.

$l_2^r(0,N)$ uzayında öyle bir y=y^0 elemanını bulacağız ki, onun normu (10) da ki minimum değere sahip olsun ve (13) şartları sağlansın.

Bu şekilde formüle edilmiş minimal enerji ile optimal kontrol etmek problemi buna yakın minimal uzunluğu olan vektörün problemine dönüşür. Bu problemde Hilbert uzayının elemanlarını ortogonal bölme metodunu tanımlayan Levi teoremine göre çözebiliriz.

Kabul edelim ki H uzayı $l_2^r(0,N)$ Hilbert uzayının alt uzayıdır ve her h(n)$\in H$ için

$$h(n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i(n) \qquad (15)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ keyfi reel sabitlerdir. $h_1(n),\dots,h_m(n)$ vektörleri ise (8) ifadesinden alınmıştır. Bu durumda her $y\in l_2^r$(0,N)için bir tek eşitlik olan y=h+g, h$\in H$, g dik H sağlanabilir ve

$$\|y\|^2 = \|h\|^2 + \|g\|^2 \qquad (16)$$

olur. Dolayısıyla $\langle h_i, y\rangle = \langle h_i, h\rangle$, (i=1,2,…,m) ve y elemanının g parçası (13) şartının sağlanmasına etki etmez. Burada $\langle \cdot,\cdot\rangle$ sembolü l_2^r(0,N)uzayındaki iç çarpımdır. Fakat (16) eşitliğinden y elemanının g parçası y nin normuna etki edebilir.

Buna göre, eğer minimal enerji ile kontrol etmek probleminin çözümü varsa o çözüm y=$y^0(n)\in H$ ve

$$y^0(n) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i(n), \qquad (17)$$

H uzayının (17) elemanı (13) şartını sağlamalıdır. Bunun için $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$

$$M\alpha = C \qquad (18)$$

lineer denklem sisteminin çözümü olacaktır. Burada,

$$M=\{\langle h_i, h_j\rangle\}_{i,j=1}^{m} \qquad (19)$$

$h_1(n),\dots,h_m(n)$ vektörlerinden meydana gelen Gram matrisidir. C vektörü ise (12) ifadesi ile belirtile bilinir.Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 1: Minimum enerji ile lineer sistemde optimal kontrol etmek probleminin çözümünün var olması için gerek ve yeter şart (18) lineer denklem sisteminin çözümünün var olmasıdır.

M matrisinin rankı $h_1(n),\dots,h_m(n)$ vektörler cümlesindeki lineer bağımsız vektörlerin sayısına eşittir. $h_i(n)$ vektörleri T(N,K)B(K-1) matrisinin i. satırının elemanlarından olduğundan M matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M = \sum_{K=1}^{N} T(N,K)B(K-1)B^{*}(K-1)T^{*}(N,K) \qquad (20)$$

Burada B^{*}matrisi B matrisinin transpozudur ve M simetrik bir matristir.

Tanım 1:M matrisine pozitif matris denir, eğer her $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ için $(M\alpha, \alpha) \geq 0$ gerek ve yeter şart $\alpha = 0$ olmasıdır.

Bu ifadeler ve bu tanımdan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2:Minimal enerji ile (1) lineer sisteminde her hangi bir x^0 ve x^N vektörleri için (7) ve (9) şartlarını sağlayan çözümün var olması için gerek ve yeter şart (20) matrisinin pozitif olmasıdır veya $h_1(n), \dots, h_m(n)$ vektörlerinin lineer bağımsız olmasıdır.

3. ÖRNEK UYGULAMA (SAMPLE APPLY)

Örnek olarak kabul edelim ki kontrol edilebilen işlem aşağıdaki farklı denklemler sistemi $0 \leq n \leq 10$ olmak üzere verilmiş olsun:

$$\begin{aligned}
x_1(n) &= x_1(n) + x_2(n) + \cdots + (9-n)y_2 \\
x_2(n) &= x_2(n) + \cdots + y_1 \\
x_3(n) &= x_3(n) + x_4(n) \\
x_4(n) &= y_1 + y_2(n) - g
\end{aligned} \qquad (21)$$

Burada g-sabit, y_1, y_2- kontrol fonksiyonlarıdır. Sistemin başlangıç durumu,

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \qquad (22)$$

Öyle bir $y_1(n), y_2(n)$ fonksiyonları bulacağız ki (21) sistemi (22) durumundan

$$x^{10} = (0,0,0,0) \qquad (23)$$

durumuna geçsin ve fonksiyonel,

$$I = \sum_{l=0}^{10} [y_1^2(n) + y_2^2(n)] \qquad (24)$$

minimal değerine sahip olsun.

Eğer (21) sistemini (1) matris denklemi şeklinde yazarsak,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & g-K \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad (25)$$

elde edilir.

Homojen sistemin temel matrisini (6) ve (25) ifadelerinden yararlanarak yazabiliriz.

$$T(n,k) = T(n-K) = A^{n-K} = \begin{pmatrix} 1 & n-K & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ olup, buradan,

$$T(10-K)B(K-1) = \begin{pmatrix} 1 & 10-K & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10-K \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-K & 10-K \\ 1 & 0 \\ 10-K & 10-K \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ve $h_i(K), \ (i = 1,2,3,4)$ vektörlerini elde ederiz.

$$h_1(K) = h_3(K) = \begin{pmatrix} 10-K \\ 10-K \end{pmatrix}, \quad h_2(K) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_4(K) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

(13) sistemini yazabilmek için C vektörünü (12) ve (13) ifadelerinden hesaplayabiliriz:

$$C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}=-A^{10}x^0-\sum_{K=1}^{10}A^{10-K}f(K-1)=-\begin{pmatrix}1&10&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&10\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\\x_3^0\\x_4^0\end{pmatrix}$$

$$-\sum_{K=1}^{10}\begin{pmatrix}1&n-K&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&10-K\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-g\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1^0+10x_2^0\\x_2^0\\x_3^0+10x_4^0\\x_4^0\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}0\\0\\45\\10\end{pmatrix}.$$

Buradan (13) sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}&\sum_{K=1}^{10}(10-K)[y_1(K-1)+y_2(K-1)]=-x_1^0-10x_2^0,\\&\sum_{K=1}^{10}y_1(K-1)=-x_2^0,\\&\sum_{K=1}^{10}(10-K)[y_1(K-1)+y_2(K-1)]=45g-x_3^0-10x_4^0,\\&\sum_{l=0}^{10}[y_2(K-1)+y_2(K-1)]=-x_4^0+10g.\end{aligned}\tag{27}$$

(26) ifadesindeki vektörlerden dört tanesinden üç tanesi lineer bağımsızdır. $h_1(K)=h_3(K)$ dır. Buna göre minimal enerji ile kontrol etmek probleminin çözülebilmesi için,

$$x_1^0+10x_2^0-x_3^0-10x_4^0+45g=0$$

şartı sağlanmalıdır. Yani $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)=x^0$ başlangıç noktası

$$(a,x)=45g\tag{28}$$

hiper düzleminde yer almalıdır. Burada $a=(-1,-10,1,10)$ sabit bir vektördür. Eğer bu şart sağlanmıyorsa istenilen kontrol fonksiyonu $y^0(n)$ e eşittir.

$$y^0(n)=\begin{pmatrix}y_1^0(n)\\y_2^0(n)\end{pmatrix}=\gamma_1h_1(n)+\gamma_2h_2(n)+\gamma_4h_4(n)$$

yani,

$$\begin{aligned}y_1^0(n)&=(10-n)\gamma_1+\gamma_2+\gamma_4.\\y_1^0(n)&=(10-n)\gamma_1+\gamma_2+\gamma_4.\end{aligned}\tag{29}$$

(29) sisteminden $y_1^0(n)$ ve $y_2^0(n)$ i (27) de 1.,2. ve 4. denklemlerde yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned}&\sum_{K=1}^{10}(10-K)[2(11-K)\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_4]=-x_1^0-10x_2^0\\&\sum_{K=1}^{10}[(11-K)\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_4]=-x_2^0\\&\sum_{K=1}^{10}[2(11-K)\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_4]=-x_4^0+10g\end{aligned}\tag{30}$$

sistemini elde ederiz.

$$\sum_{K=1}^{10}(11-K)=10+9+\cdots+2+1=55,$$
$$\sum_{K=1}^{10}(10-K)=9+8+\cdots+2+1+0=45,$$
$$\sum_{K=1}^{10}(10-K)(11-K)=9.10+8.9+\cdots+2.3+1.2=330,$$
olduğundan (30) sistemi,

$$660\gamma_1+45\gamma_2+90\gamma_4=-x_1^0-10x_2^0,$$
$$55\gamma_1+10\gamma_2+10\gamma_4=-x_2^0,$$
$$110\gamma_1+10\gamma_2+20\gamma_4=-x_4^0+10g,$$
istemine dönüşür. Buradan,

$$\gamma_1=-\frac{1}{165}x_1^0-\frac{10}{165}x_2^0+\frac{3}{110}x_4^0-\frac{3}{11}g$$

$$\gamma_2=-\frac{1}{5}x_2^0+\frac{1}{10}x_4^0-g \qquad (31)$$

$$\gamma_4=\frac{1}{30}x_1^0+\frac{13}{30}x_2^0-\frac{1}{4}x_4^0+\frac{5}{2}g$$

olur. $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ ifadelerini (29) da yerine yazarsak, istenilen minimal enerji ile optimal kontrol edilebilen fonksiyonları elde ederiz:

$$y_1^0(n)=-\frac{3}{110}x_1^0-\frac{41}{110}x_2^0+\frac{27}{220}x_4^0-\frac{27}{22}g+\left(-\frac{1}{165}x_1^0-\frac{10}{165}x_2^0-\frac{3}{110}x_4^0+\frac{3}{11}g\right)n, \qquad (32)$$

$$y_2^0(n)=-\frac{3}{110}x_1^0-\frac{19}{110}x_2^0+\frac{1}{44}x_4^0-\frac{5}{22}g+\left(\frac{1}{165}x_1^0+\frac{10}{165}x_2^0-\frac{3}{110}x_4^0+\frac{3}{11}g\right)n.$$

4. SONUÇ (CONCLUSION)

Verilen problem tam çözülmüştür. Bu çözüm x^0 başlangıç noktasının (28) hiper düzlemine ait olması şartı ile bulunmuştur. Eğer x^0 (28) hiper düzleminin elemanı değil ise, yukarıda formüle edilmiş problemin çözümü yoktur. (32) fonksiyonlarında (24) fonksiyoneli minimal değerine sahiptir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Egorov, A.İ. ve Rafatov, R.R., (1990). Termik ve Difüzyon İşleri Optimizasyonnun Matematiksel Metotları, Frunze, Kırgızistan.
2. Keyz, K. and Tsvayfel, P., (1972). Taşınmanın Lineer Teorisi, M.Mir.
3. Lüsternik, L.A. ve Sobolev, V.İ., (1965). Fonksiyonel Analizin Elemanları. M.Mir.
4. Hacısalihoğlu, H.H., (1985). Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları Ankara.