**ISSN:1306-3111**
**e-Journal of New World Sciences Academy**
**2008, Volume: 3, Number: 4**
**Article Number: A0108**

**NATURAL AND APPLIED SCIENCES**
**MATHEMATICS**
❖ **APPLIED MATHEMATICS**
Received: March 2008
Accepted: September 2008


**Mehmet Güngör**
**Ayşegül Gökhan**
**Yavuz Altın**
**Yunus Bulut**
University of Firat
mgungor@firat.edu.tr
Elazig-Turkiye

## TESADÜFİ DEĞİŞKENLERLE İLGİLİ BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

**ÖZET**

Bu çalışmada, tesadüfi değişkenlerin yakınsaklığı ile ilgili olan noktasal yakınsaklık, hemen hemen her yerde yakınsaklık, ortalama-kare anlamında yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve dağılımsal yakınsaklık kavramları incelenmiş ve aralarındaki bazı ilişkiler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Noktasal Yakınsaklık, Hemen Hemen Her Yerde Yakınsaklık, Ortalama-Kare Anlamında Yakınsaklık, İstatistiksel Yakınsaklık, Dağılımsal Yakınsaklık

## THE COMPARISON OF SOME CONVERGENCE MODES FOR RANDOM VARIABLES

**ABSTRACT**

In this study, the concepts of convergence in pointwise, almost everywhere convergence, convergence in mean-square, convergence in probability and convergence in distribution for random variables are considered and given some relations among them.

**Keywords:** Convergence in Pointwise, Almost Everywhere Convergence, Convergence in Mean-Square, Convergence in Probability, Convergence in Distribution

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

$(X_n(w))$, $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı tesadüfi değişkenlerin bir dizisi olsun. $\Delta \in \Im$ olmak üzere her bir $w \in \Delta$ için $\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)$ olacak şekilde $\Delta$ üzerinde tanımlanan bir $X(w)$ mevcut ise $(X_n(w))$ dizisi, (noktasal) yakınsaktır denir. Yani, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $w \in \Delta$ için bir $n_0(\varepsilon,w)$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ olduğunda $|X_n(w) - X(w)| < \varepsilon$'dır. Buda, bir deneyin sonucu ne olursa olsun $X_n \to X$ demektir. Eğer, $\Delta = \Omega$ ise yakınsaklık her yerdedir denir. Bununla birlikte bu şekildeki kuvvetli yakınsaklık, olasılık modellerini hemen hemen tam olarak karakterize etmez. Örneğin, düzgün bir madeni para n defa atıldığında tura gelmesi oranı, sıfır olasılığına sahip olmayan sonsuz dizilere rağmen bütün diziler için 1/2'ye yakınsamaz. O halde, sıfır olasılıklı bir w cümlesi hariç, bütün w'lar için $X_n(w)$, $X(w)$'ya yakınsayacak şekilde daha zayıf bir yakınsaklık çeşidine ihtiyaç vardır. Tesadüfi değişkenler dizisinin yakınsaklığından ziyade ortalamaların yakınsaklığını oluşturacağımız bazı fiziksel durumlar için bu yakınsaklık, oldukça kuvvetli bir kavramdır.

## 2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Bu çalışmada tesadüfi değişkenlerle ilgili yakınsaklık türleri araştırılıp, aralarındaki ilişkiler verilmiştir. Çalışma bulguları bundan sonra ve bu konuda yapılacak çalışmalara örnek olması açısından önem arz etmektedir.

## 3. BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ (SOME CONVERGENCE MODES)

**Hemen hemen her yerde yakınsaklık:** Tesadüfi değişkenlerin bir $(X_n(w))$ dizisi için $\forall w \in \Omega \setminus N$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w) \quad \text{(sonlu)} \quad \text{veya} \quad P\{w: \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\} = 1$$

olacak şekilde bir sıfır ölçümlü N cümlesi varsa $(X_n(w))$ dizisine, $X(w)$'ya hemen hemen her yerde yakınsaktır denir ve $X_n \xrightarrow{hhhy} X$ ile gösterilir [1, 4, 6, 7, 8 ve 9]. Tipik bir örnek olarak; $s^2$ örnek varyansının, $\sigma^2$ anakütle varyansına h.h. her yerde yakınsadığı söylenebilir. Noktasal yakınsaklık ile h.h. her yerde yakınsaklığı karşılaştırırsak aşağıdaki ifadeyi verebiliriz.

$(X_n(w))$ dizisinin, $X(w)$ fonksiyonuna $\Omega$ üzerinde h.h. her yerde yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, $(X_n(w))$'nın $X(w)$'ya noktasal yakınsamadığı noktaların cümlesinin sıfır ölçümlü olmasıdır.

Buna göre; $(X_n(w))$, $X(w)$'ya h.h. her yerde yakınsak ise $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\Omega$'nın öyle bir N alt cümlesi vardır ki $P(N) = 0$ ve $w \in \Omega \setminus N$ için bir $n_0(\varepsilon,w)$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|X_n(w)-X(w)| < \varepsilon$'dır [1].

**Teorem 1:** $X_n \xrightarrow{hhhy} X$ olması için gerek ve yeter koşul, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m\to\infty} P\{w: \text{her } n \geq m \text{ için } |X_n(w) - X(w)| \leq \varepsilon\} = 1$$

veya bu ifadeye eşdeğer olan

$$\lim_{m\to\infty} P\{w : \text{bazı } n \geq m \text{ için } |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} = 0$$

olmasıdır [2].

**Teorem 2:** $(X_n(w))$, $X(w)$'ya noktasal yakınsak ise h.h.her yerde $X(w)$'ya yakınsaktır [1]. Bu teoremin tersi, doğru değildir. Bunu, bir örnekle ifade edelim.

**Örnek 1:** [0, 1] aralığında tanımlı $(X_n(w)) = (w - w^n)$ dizisi, $X(w) = w$'ya h.h. her yerde yakınsaktır fakat, noktasal yakınsak değildir. Çünkü, $(X_n(w))$ dizisi, [0, 1] üzerinde noktasal yakınsaktır.

**İstatistiksel yakınsaklık:** $(X_n(w))$, tesadüfi değişkenlerin bir dizisi ve $w\in\Omega$ olsun. Eğer, her bir $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için her $n \geq n_0$ olmak üzere

$$P\{w : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} < \delta$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbf{N}$ varsa yani, her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{w : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} = 0$$

ise $(X_n(w))$ dizisi, $X(w)$'ya istatistiksel yakınsaktır denir ve $X_n \xrightarrow{ist} X$ ile gösterilir [2, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9].

**Teorem 3:** $X_n \xrightarrow{ist} X$ ve $X_n \xrightarrow{ist} Y$ ise hemen hemen her yerde, $X=Y$'dir [2].

**Teorem 4:** Eğer $(X_n(w))$, $X(w)$'ya h.h.her yerde yakınsak ise aynı zamanda, $X(w)$'ya istatistiksel yakınsaktır [9]. Bu teoremin tersi, doğru değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

**Örnek 2:** $P\{a \leq w \leq b\} = b-a$ olmak üzere [0, 1] aralığı üzerinde $i = 1, 2, 3, \ldots$ ve $j = 1, 2, \ldots, i$ için $(Z_{ij}(w))$ tesadüfi değişkenler dizisini,

$$Z_{ij}(w) = \begin{cases} 1 \quad , & \frac{j-1}{i} < w \leq \frac{j}{i} \quad \text{ise} \\ 0 \quad , & \text{öteki hallerde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu dizi, istatistiksel yakınsak fakat, h.h. her yerde yakınsak değildir. Şimdi; bunu, gösterelim.

$I = \{(i, j) : i = 1, 2, 3, \ldots \text{ ve } j = 1, 2, \ldots, i\}$ için $J: I \to \mathbf{N}$, $J(i, j) = n = \frac{i(i-1)}{2} + j$ olmak üzere $Z_{ij}(w)$ tesadüfi değişkenini, $Z_n(w) = X_n(w)$ olarak yeniden düzenleyelim. $X(w) = 0$ seçelim. $\varepsilon \geq 1$ için

$$P\{w : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} = P\{\phi\} = 0$$

ve $0 < \varepsilon < 1$ için

$$P\{w : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} = P\{w : |X_n(w)| = 1 > \varepsilon\} = \frac{j}{i} - \frac{j-1}{i} = \frac{1}{i} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \to 0$$

olup, buda $X_n(w) \xrightarrow{ist} X(w) = 0$ demektir. Bununla birlikte; $X_n(w)$, $X(w)$'ya h.h. her yerde yakınsak değildir. Gerçektende, $w\in(0, 1]$ ve herhangi bir $n_0$ için $X_n(w) = 1$ olacak şekilde bir $n \geq n_0$ vardır. Yani,

$$P\{w: \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)=0\} = 0$$

olur.

**Teorem 5:** $X_n \xrightarrow{ist} X$ ise $k \to \infty$ için $X_{n(k)} \xrightarrow{hhhy} X$ olacak şekilde $(X_n(w))$ dizisinin bir $(X_{n(k)}(w))$ alt dizisi vardır [7].

**Ortalama-kare anlamında yakınsaklık:** Eğer $\lim_{n\to\infty} E\{|X_n(w)-X(w)|^2\} = 0$ ise $(X_n(w))$ dizisine, $X(w)$'ya ortalama-kare anlamında yakınsaktır denir ve $X_n \xrightarrow{L_2} X$ ile gösterilir [6] .

**Teorem 6:** Ortalama-kare anlamında yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığı gerektirir. Yani;

$$X_n \xrightarrow{L_2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{ist} X$$

ifadesi yazılabilir [6].

İstatistiksel yakınsaklık, ortalama-kare anlamında yakınsaklığı gerektirmez. Bu durum, aşağıdaki örnekle açıklanmaktadır.

**Örnek 3:** $P\{w: X_n(w) = 0\} = 1- 1/\log n$ ve $P\{w: X_n(w)= n\} = 1/\log n$ ile tanımlanan $(X_n(w))$ dizisi, $X(w)=0$'a istatistiksel yakınsak fakat, ortalama-kare anlamında yakınsak değildir.

**Dağılımsal yakınsaklık:** $F_n(X)$ ve $F(X)$ sırasıyla, $X_n$ ve $X$'in dağılım fonksiyonlarını göstersin. $F(X)$'in sürekli olduğu her bir $X$ noktası için

$$\lim_{n\to\infty} F_n(X) = F(X)$$

ise $(X_n)$ dizisi, $X$'e dağılımsal yakınsaktır denir ve $X_n \xrightarrow{d} X$ ile gösterilir [3], [4], [6], [7], [9].

**Örnek 4:** Başarılı sonuçların gelme olasılığı p olan bağımsız denemelerin bir sonsuz dizisini düşünelim. $X_n$ , ilk n süreçteki başarılı sonuçların oranını göstersin. O zaman,

$$\sqrt{n}\,(X_n - p)\ /\left[p(1-p)\right]^{1/2} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

ifadesi yazılabilir. Burada, $N(0,1)$; standart normal dağılımı ifade etmektedir.

**Teorem 7:** İstatistiksel yakınsaklık, dağılımsal yakınsaklığı gerektirir [4].

Aşağıdaki örnekte ifade edeceğimiz gibi dağılımsal yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığı gerektirmez.

**Örnek 5:** $X(w)$, standart normal dağılımlı olsun ve $(X_n(w))$ dizisi,

$X_{2k+1}(w) = X(w)$, $k = 0, 1, 2, ...$

$X_{2k}(w) = -X(w)$, $k = 1, 2, ...$

şeklinde tanımlansın. O zaman,

$$F_n(X) = F(X)$$

olduğu kolayca görülür. Burada dizideki her bir tesadüfi değişken, standart normal dağılımlıdır. Böylece,

$$F_n(X) \xrightarrow{d} F(X)$$

olduğu açıktır. Bununla birlikte, $n = 2k$ ( $k = 1,2, ...$) için

$$|X_n(w) - X(w)| = 2\,|X(w)|$$

yazılabilir. Böylece,

$$P\{w : |X_n(w) - X(w)| \geq 1\} = P\{w : |X(w)| \geq 1/2\} \approx 0.617$$

olur. Yani; söz konusu dizi, istatistiksel yakınsak değildir.

**Teorem 8:** $(X_n(w))$, tesadüfi değişkenler dizisi ve c bir sabit olmak üzere $X_n \xrightarrow{ist} c$ olması için gerek ve yeter koşul, $X_n \xrightarrow{d} c$ olmasıdır. Burada,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < c \\ 1 & , x \geq c \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir [4].

İstatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini, S ile gösterelim. Yani,

$$S = \{ (X_n(w)) : \lim_{n\to\infty} P\{w : | X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} = 0\}$$

olsun. S cümlesi, bir vektör uzayıdır. Gerçektende,

i) $X_n \xrightarrow{ist} X$ ve $Y_n \xrightarrow{ist} Y$ ise $X_n + Y_n \xrightarrow{ist} X + Y$,

ii) $\alpha$ herhangi bir sabit olmak üzere, $X_n \xrightarrow{ist} X$ ise $\alpha X_n \xrightarrow{ist} \alpha X$

olduğu kolayca gösterilebilir. Aynı şekilde; noktasal yakınsak, h.h. her yerde yakınsak, ortalama-kare yakınsak ve dağılımsal yakınsak dizilerin cümleleri de, birer vektör uzayı oluşturur.

## 4. SONUÇ (RESULT)

Sonuç olarak; buraya kadar anlatılanlardan n; noktasal yakınsaklığı göstermek üzere, aşağıdaki şema verilebilir.

$$\begin{array}{ccccc} & & X_n \xrightarrow{n} X & \Rightarrow & X_n \xrightarrow{hhhy} X \\ & & \Downarrow & & \\ X_n \xrightarrow{L_2} X & \Rightarrow & X_n \xrightarrow{ist} X & \Rightarrow & X_n \xrightarrow{d} X \end{array}$$

## KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Balcı, M., (1998). Reel Analiz, Ertem Matbaası, Ankara.
2. Chung, K.I., (1974). A Course Probability Theory, Academic Press, New York.
3. Güngör, M. and Çalık, S., (2000). On the Order Statistics in Samples from Finite Population, Jour. of Inst. of Math. and Comp. Sci., Vol. 13, No.3, 339-342.
4. Harris, B., (1966). Theory of Probability, Addison - Wesley Publishing Company, London.
5. Kappos, D.A., (1969). Probability Algebras and Stochastic Spaces, Academic Press, New York.
6. Papoulis, A., (1965). Probability Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill Book Company, New York.
7. Serfling, R.J., (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.
8. Whittle, P., (1970). Probability, John Wiley and Sons, London.
9. Wilks, S.S., (1962). Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, London.