ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2009, Volume: 4, Number: 4, Article Number: 3A0016

PHYSICAL SCIENCES
Received: February 2009
Accepted: September 2009
Series : 3A
ISSN : 1308-7304

Gonca İnceoğlu
Refail Kasımbeyli
Anadolu University
inceoglugonca@gmail.com
Eskisehir-Turkey

RADYAL EPİTÜREVLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

ÖZET

Bu makalede tek değerli ve küme değerli dönüşümler için radyal epitürevlerin bazı özelliklerini inceledik. Radyal epitürevle ve radyal türevle ilişkisini incelendi.
Anahtar Kelimeler. Küme Değerli Dönüşüm, Radyal Koni, Radyal Epitürev, Radyal Türev.

A RESEARH ON SOME PROPERTIES OF THE RADIAL EPIDERIVATIVES

ABSTRACT

In this paper we study some important properties of the radial epiderivatives for single valued and set valued maps. The relationship between the radial epiderivative and the radial epiderivative has been establish.
Keywords. Set Valued Map, Radial Cone, Radial Epiderivative, Radial Derivative

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Son yıllarda türev kavramı küme değerli analiz ve küme değerli optimizasyon teorisinde önem kazanan bir çalışma konusu haline gelmiştir ve literatürde çeşitli şekilde formule edilmiştir [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11]. Contingent türev kavramı ilk olarak Aubin tarafından verilmiştir [1]. Küme değerli dönüşümler için contingent türev kavramı küme değerli optimizasyonda önemli bir rol oynar ve optimallik koşullarının elde edilmesinde kullanılmıştır. Fakat gerekli optimallik [7, Theorem 4.1] koşuları ve yeterli [7, Theorem 4.2] optimallik koşullarının standart varsayımlar altında çakışmadığı ortaya çıkmıştır. Bu da küme değerli optimizasyonda optimallik koşullarının elde edilmesinde contingent türevin doğru bir araç olmadığını göstermiştir. Bu nedenle ilk olarak Aubin tarafından contingent epitürev kavramı " contingent üst türev " adıyla tanımlanmıştır. Daha sonra kontekste contingent epitürev adıyla kullanılmıştır.

Literatürde konveks küme değerli optimizasyon problemleri için Jahn ve Rauh tarafından verilen contingent epitürev kavramı çok rağbet görmüş ve izleyen çalışmalarda kullanılmıştır [9].

Konveks olmayan problemlerde kullanılmak üzere ilk olarak Bazan [4] tarafından radyal epitürev kavramı tanımlanmıştır ve bu kavram kullanılarak küme değerli optimizasyonda konvekslik varsayımı olmaksızın zayıf minimal çözümler için optimallik koşulları elde edildi. Fakat Bazan tarafından verilen radyal epitürev tanımı küme değerli dönüşümlerin infimum değerlerinin varlığını garanti eder. Üstelik temel karakterizasyon teoremi sıralama konisi C 'nin konveks, pointed ve $C \cup (-C) = Y$ varsayımı altında ispatlanır (bkz [4,Theorem 3.9]). Bu koşullar çok kısıtlayıcı koşullardır ve yazar tarafından da kısıtlayıcı olarak nitelendirilir (bkz [5]).

Kasımbeyli konvekslik ve sınırlılık varsayımları olmaksızın bir küme değerli dönüşüm için yeni bir radyal epitürev kavramını tanımladı ve küme dğerli dönüşümler için bu yeni kavramı kullanarak gerekli ve yeterli optimallik koşullarını elde etti [8].

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICATION)

Çalışmanın amacı, Kasımbeyli tarafından verilen radyal epitürevlerin özelliklerini incelemek ve bu epitürevin radyal türevle ilişkisini kurmaktır.

3. RADYAL EPİTÜREVLER VE ÖZELLİKLERİ (RADIAL EPIDERIVATIVES AND PROPERTIES)

Sırasıyla Jahn ve Rauh ve Kasımbeyli tarafından tanıtılan contingent epitürev ve radyal epitürev kavramlarını standart kavramlarla birlikte hatırlayalım.

Tanım 1. $(X, \|.\|_X)$ bir reel normlu uzay C kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.

- Her $x \in C$ ve her $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in C$ ise C kümesine bir koni denir.
- C bir koni olsun. $C \cap (-C) = \{0_X\}$ ise C konisine pointed koni denir.

Tanım 2. S kümesi X reel normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$cone(S) = \{x \in X : \exists \lambda \geq 0, \exists s \in S\}$$

kümesine S kümesi ile üretilen koni denir.

Tanım 3. $(X, \|.\|_X)$ bir reel normlu uzay olsun.

- $X \times X$ çarpım uzayının her bir $\Re$ alt kümesi X üzerinde bir adi bağıntı olarak adlandırılır.
- Keyfi $x, y, z, w \in X$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa X üzerinde "≤" adi bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı olarak adlandırılır:

$$a) x \leq x,$$
$$b) x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$
$$c) x \leq y, w \leq z \Rightarrow x + w \leq y + z$$
$$d) x \leq y, \alpha \in R \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$$

Tanım 4. Bir reel normlu uzayda kısmi sıralamayı karakterize eden bir konveks koni sıralama konisi olarak adlandırılır.

Tanım 5. U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl(U)$ verilsin. $(z_n)_{n \in IN} \subset U$ dizisi; pozitif reel sayıların bir $(\lambda_n)_{n \in IN}$ dizisi $\bar{z} = \lim_{n \to \infty} z_n$ ve $h = \lim_{n \to \infty} \lambda_n (z_n - \bar{z})$ olacak şekilde varsa $h \in Z$ vektörüne U' ya $\bar{z}$ noktasındaki tanjant vektörü denir. $\bar{z}$ noktasındaki tüm tanjant vektörlerin kümesine U kümesine $\bar{z}$ noktasındaki contingent konisi denir [9].

Tanım 6. U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl(U)$ verilsin. U kümesinin $\bar{z}$ noktasındaki kapalı radyal konisi

$$R(U, \bar{z}) = \left\{ z \in X : \exists \lambda_n > 0, \exists (z_n)_{n \in N} \subset X, \lim_{n \to \infty} z_n = z, \forall n \in N i\c{c}in \bar{z} + \lambda_n z_n \in U \right\}$$

olarak tanımlanır.
Dikkat edilirse kapalı radyal koni denk olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 7. U kümesi $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun ve $\bar{z} \in cl(U)$ verilsin. U kümesinin $\bar{z}$ noktasındaki kapalı radyal konisi

$$R(U, \bar{z}) = \left\{ z \in X : \exists \lambda_n > 0, \exists (z_n)_{n \in N} \subset U, \lim_{n \to \infty} \lambda_n (z_n - \bar{z}) = z \right\}$$

olarak tanımlanır.
Bu tanımlardan

$$R(U, \bar{z} = cl(cone(U - \bar{z})))$$

olduğu görülür [8].

Tanım 8. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F : S \to 2^Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun.

- $graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in S, y \in F(x)\}$

kümesi F küme değerli dönüşümünün grafiği olarak adlandırılır.

- $dom(F)=\{x\in X : F(x)\neq \Phi\}$

kümesi F küme değerli dönüşümünün tanım kümesi olarak adlandırılır.

- Y uzayı bir konveks $C\subset Y$ konisiyle kısmi sıralı olsun. $epi(F)=\{(x,y)\in X\times Y : x\in S, y\in F(x)+C\}$

kümesi F küme değerli dönüşümünün epigrafı olarak adlandırılır.

- Bir $(\bar{x},\bar{y})\in graph(F)$ ikilisi verilsin. Epigrafı F küme değerli dönüşümün epigrafının $(\bar{x},\bar{y})$ noktasındaki contingent konisine eşit olan tek değerli $DF(\bar{x},\bar{y}): X\to Y$ dönüşüme ; yani
$$epi(DF(\bar{x},\bar{y}))=R(epi(F),(\bar{x},\bar{y}));$$

F dönüşümünün $(\bar{x},\bar{y})$ noktasındaki contingent epitürevi denir [9].

Şimdi Kasımbeyli tarafından verilen radyal epitürevin tanımını hatırlayalım [8].

Tanım 9. $(X,\|.\|_X)$ ve $(Y,\|.\|_Y)$ reel normlu uzaylar, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F: S\to 2^Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun ve $(\bar{x},\bar{y})\in graph(F)$ verilsin. Epigrafı F küme değerli dönüşümünün epigrafiğine $(\bar{x},\bar{y})$ noktasındaki radyal konisine eşit olan yani,
$$epiD_rF(\bar{x},\bar{y})=R(epi(F),(\bar{x},\bar{y})),$$
tek değerli dönüşüm $D_rF(\bar{x},\bar{y}): X\to Y$ F küme değerli dönüşümünün $(\bar{x},\bar{y})$ noktasındaki radyal epitürevi olarak adlandırılır.

Bu tanımı aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 1. $F(x)=|1-x^2|+R_+$ ile tanımlanan $F: R\to 2^R$ küme değerli bir dönüşümünü düşünelim. $epi(F)$ kümesinin $(0,1)$ noktasındaki radyal konisinine bakacak olursak
$$R(epi(F),(0,1))=\{(x,y)\in R^2 : y\geq -|x|\}$$
dir ve dolayısıyla bu noktadaki radyal epitürevi
$$D_rF(\bar{x},\bar{y})(x)=-|x|$$
olur. Şimdi F küme değerli dönüşümünün $(-1,0)$ ve $(1,0)$ noktalarındaki radyal epitürevlerini bulalım. $(\bar{x},\bar{y})=(-1,0)$ noktasındaki radyal koni
$$R(epi(F),(-1,0))=\begin{cases} y\geq 2x, x\leq 0 \\ y\geq 0 \;, x>0\end{cases}$$
olup radyal epitürevi
$$D_rF(-1,0)(x)=\begin{cases} y=2x, x\leq 0 \\ y=0 \;, x>0\end{cases}$$
olur. $(\bar{x},\bar{y})=(1,0)$ noktasındaki radyal koni
$$R(epi(F),(1,0))=\begin{cases} y\geq 0 \;, x\leq 0 \\ y\geq 2x, x>0\end{cases}$$

olup radyal epitürevi

$$D_r F(1,0)(x) = \begin{cases} y = 0 \ , x \leq 0 \\ y = 2x, x > 0 \end{cases}$$

olur. Şimdi $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ noktasında radyal konisi ve radyal epitürevi sırasıyla

$$R\left(epi(F), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) = \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} \ , x \leq 0 \\ y \geq -\frac{3}{2}, x > 0 \end{cases}$$

$$D_r F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)(x) = \begin{cases} y = \frac{x}{2} \ , x \leq 0 \\ y = -\frac{3}{2}x, x > 0 \end{cases}$$

olur.

Kasımbeyli $Y = R$ özel durumunda radyal epitürevler için varlık teoremini verdi.

Teorem 1. $(X, \|.\|_X)$ reel normlu uzay, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F : S \to 2^R$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ elemanları verilsin. $f, g : X \to R$ fonksiyonları $epi(g) \subset R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})) \subset epi(f)$ olacak şekilde var olsun. O zaman radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ her $x \in X$ için

$$D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x) = \min\{y \in R : (x, y) \in R(epi(F), (\overline{x, y}))\}$$

olarak verilir.
Aşağıdaki örnek bu teoremin sağlandığını gösterir.

Örnek 2. $F : R \to 2^R$ küme değerli dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$F(x) = \begin{cases} [\sqrt{x}, +\infty), & x \neq 0 \\ [0, +\infty) \ , & x = 0 \end{cases}$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ olsun. $epi(F) = graph(F)$ olduğu açıktır ve $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ noktasındaki $epi(F)'$ in radyal konisi $R(epi(F), (0,0)) = \{(x, y) \in R^2 : y \geq 0\}$ dir. Böylece radyal epitürev her $x \in R$ için $D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x) = 0$ olur. Benzer olarak $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ noktasındaki $epi(F)'$ in contingent konisi $T(epi(F), (0,0)) = \{(0, y) \in R^2 : y \geq 0\}$ olup; dolayısıyla contingent epitürevi $DF : R \to R$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$DF(\bar{x}, \bar{y})(x) = \begin{cases} 0 \ , x \neq 0 \, ise \\ \Phi, x = 0 \, ise \end{cases}$$

Buradan açıkça görüldüğü gibi; radyal epitürev her $x \in R$ için vardır fakat contingent epitürev ise sadece $x = 0$ noktasında vardır.

Tanım 10. X bir reel lineer uzay ve Y reel lineer uzayı bir konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı olsun. $f : X \to Y$ dönüşümü

i. Her $\alpha \geq 0$ ve her $x \in X$ için $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, (pozitif homojenlik)

ii. Her $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1 + x_2) \in \{f(x_1) + f(x_2)\} - C$ (alt toplamsallık)

Özelliklerini sağlıyorsa sublineer olarak adlandırılır [9].

$Y = R$ ve $C = R_+$ olmasında durumunda ii. koşulu her $x_1, x_2 \in X$ için

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$$

olarak yazılabilir.

Aşağıdaki teorem F küme değerli dönüşümünün C-konveks olması durumunda contingent epitürevler için ispatlandı [9, Theorem 4].

Teorem 2. $\left(X, \|.\|_X\right)$ ve $\left(Y, \|.\|_Y\right)$ reel normlu uzaylar, Y bir pointed konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi, $F : S \to 2^Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun ve $\bar{x} \in S$ ve $\bar{y} \in F(\bar{x})$ elemanları verilsin. Radyal epitürev $D_r F(\bar{x}, \bar{y})$ varsa o zaman pozitif homojendir. Üstelik $R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y}))$ konveks koni ise o zaman radyal epitürev sublineerdir(altlineer).

Kanıt. Başlangıç olarak keyfi $\alpha > 0$ ve keyfi $x \in X$ alalım. $epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ koni ve $(x, D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x)) \in epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ olduğu için $(\alpha x, \alpha D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x)) \in epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ dir. Epigrafın tanımı ile

$$\alpha D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x) \in \{D_r F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)\} + C \tag{1}$$

elde ederiz. Fakat $(\alpha x, D_r F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)) \in epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ ile de

$$\left(x, \frac{1}{\alpha} D_r F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)\right) \in epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y})) \text{ olur bu da}$$

$$\frac{1}{\alpha} D_r F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x) \in \{D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x)\} + C$$

veya $\alpha D_r F(\overline{x, y})(x) \in \{D_r F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x)\} - C$. (2)

C pointed olduğundan ve de (1) ve (2)koşullarından

$$\alpha D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x) = D_r F(\bar{x}, \bar{y})(\alpha x). . \tag{3}$$

Üstelik (1) de $\alpha = 2$ ve $x = 0_X$ alarak

$$2D_r F(\bar{x}, \bar{y})(0_X) \in \{D_r F(\bar{x}, \bar{y})(0_X)\} + C,$$

elde ederiz. Buradan da $D_r F(\bar{x}, \bar{y})(0_X) \in C$. $(0_X, 0_Y) \in epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ olduğundan $D_r F(\bar{x}, \bar{y})(0_X) \in (-C)$ olur. C pointed olduğundan $D_r F(\bar{x}, \bar{y})(0_X) = 0$. Böylece, radyal epitürev pozitif homojendir. Alt toplamsallık için keyfi $x_1, x_2 \in X$ alalım. $(x_1, D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x_1)) \in epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$, $(x_2, D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x_2)) \in epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ ve $R(epi(F), (\bar{x}, \bar{y})) = epi(D_r F(\bar{x}, \bar{y}))$ konveks bir koni olduğu için

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2} D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x_1) + \frac{1}{2} D_r F(\bar{x}, \bar{y})(x_2)\right)$$

olur; bu ise

$$\frac{1}{2}\left(D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_1\right)+D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_2\right)\right)\in\left\{D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)\right)\right\}+C$$

veya

$$\left(D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_1\right)+D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_2\right)\right)\in\left\{D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_1+x_2\right)\right\}+C$$

olmasını gerektirir. Böylece radyal epitürevin sublineer olduğunu göstermiş olduk.

Aşağıdaki örnek radyal koni konveks değilse radyal epitürevin sublineer olmadığını açıklar.

Örnek 3. F küme değerli dönüşümü Örnek 2 deki gibi olsun. $\left(\bar{x},\bar{y}\right)=(0,0)$ için $R\left(epi(F),(0,0)\right)=\left\{(x,y)\in R^2 : y\geq -|x|\right\}$ dir ve buradan da radyal epitürev $D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)(x)=-|x|$ olur. Açıkça görüldüğü gibi epi(F) kümesinin radyal konisi konveks değildir ve radyal epitürev de sublineer değildir. Gerçekten; Keyfi $x_1,x_2\in R$ alalım.

$$D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_1+x_2\right)=-\left|x_1+x_2\right|\geq-\left(\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\right)=D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_1\right)+D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\left(x_2\right)$$

olur ki bu da radyal epitürevin sublineer olmadığını gösterir.

Şimdi Bazan tarafından verilen radyal türev kavramını hatırlayalım.

Tanım 11. $\left(X,\|.\|_X\right)$ ve $\left(Y,\|.\|_Y\right)$ reel normlu uzaylar, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $F:S\to 2^Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun ve $\left(\bar{x},\bar{y}\right)\in graph(F)$ verilsin. Grafiği F küme değerli dönüşümünün grafiğine $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ noktasındaki radyal konisine eşit olan yani,

$$graph\left(D_rF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right)=R\left(graph(F),\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right),$$

küme değerli dönüşüm $D_RF\left(\bar{x},\bar{y}\right):X\to 2^Y$ F küme değerli dönüşümünün $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ noktasındaki radyal türevi olarak adlandırılır.

Burada konveks olmayan küme değerli dönüşümler için radyal türev ve radyal epitürev arasındaki ilişkiyi kanıtladık.

Teorem 3. $\left(X,\|.\|_X\right)$ ve $\left(Y,\|.\|_Y\right)$ reel normlu uzaylar ve Y uzayı bir kapalı konveks $C\subset Y$ konisiyle kısmi sıralı ve $F:X\to 2^Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun ve $\left(\bar{x},\bar{y}\right)\in graph(F)$ verilsin. Radyal türev ve radyal epitürev varsa o zaman $epi\left(D_RF\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right)\subset epi\left(D_rF\left(\overline{x,y}\right)\right)$ dır.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
& epi\left(D_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right) = R\left(epi(F),\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right) \\
& = cl\left(cone\left(epi(F) - \left\{\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right\}\right)\right) \\
& = cl\left(cone\left(graph(F) - \left\{\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right\} + \left(\{0\} \div C\right)\right)\right) \\
& \supset cl\left(cone\left(graph(F) - \left\{\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right\}\right)\right) + cl\left(\{0\} \times C\right) \\
& = cl\left(cone\left(graph(F) - \left\{\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right\}\right)\right) + \left(\{0\} \times C\right) \\
& = R\left(graph(F),\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right) + \left(\{0\} \times C\right) \\
& = epi\left(D_R F\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Teorem 4. $\left(X,\|.\|_X\right)$ ve $\left(Y,\|.\|_Y\right)$ reel normlu uzaylar ve Y uzayı bir kapalı konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı ve $F : X \to 2^Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun ve $\left(\bar{x},\bar{y}\right) \in graph(F)$ verilsin. Radyal epitürev $D_r F\left(\overline{x,y}\right)$ varsa alttan yarı süreklidir.

Kanıt Radyal koni bir normlu uzayda daima kapalı ve $epiD_r F\left(\bar{x},\bar{y}\right) = R\left(epi(F),\left(\bar{x},\bar{y}\right)\right)$ olduğundan radyal epitürevin epigrafı da kapalıdır (bkz [12, Theorem 7.1, 51.s]). Böylece radyal epitürev alttan yarı süreklidir.

Teorem 5. $\left(X,\|.\|_X\right)$ ve $\left(Y,\|.\|_Y\right)$ reel normlu uzaylar, S kümesi X uzayının boş olmayan bir alt kümesi, Y uzayı bir konveks $C \subset Y$ konisiyle kısmi sıralı, $f,g : S \to Y$ ve $\bar{x} \in S$ olmak üzere $F : S \to 2^Y$ küme değerli bir dönüşümü

$$F(x) := \left\{y \in Y : f(x) \leq_C y \leq_C g(x)\right\}$$

olarak verilsin. Radyal epitürev $D_r F\left(\bar{x}, f\left(\bar{x}\right)\right)$ varsa o zaman

$$D_r F\left(\bar{x}, f\left(\bar{x}\right)\right) = D_r f\left(\bar{x}, f\left(\bar{x}\right)\right).$$

Kanıt. F küme değerli dönüşümün tanımından

$$epi(F) = \left\{(x,y) \in X \times Y : x \in S,\ f(x) \leq_C y\right\} = epi(f)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& epi\left(D_r F\left(\bar{x}, f\left(\bar{x}\right)\right)\right) = R\left(epi(F),\left(\bar{x}, f\left(\bar{x}\right)\right)\right) \\
& = R\left(epi(f),\left(\bar{x}, f\left(\bar{x}\right)\right)\right) \\
& = epi\left(D_r f\left(\bar{x}, f\left(\bar{x}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu da iddiamızı doğrular.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER (CONCLUSION AND SUGGESTION)

Bu makalede Kasımbeyli tarafından [8] de tanımlanmış olan radyal epitürevin sublineerlik ve alttan yarı süreklilik özellikleri incelendi. Radyal epitürevin radyal türev ile olan ilişkisi kuruldu. Radyal epitürevin tanım kümesinin contingent epitürevin tanım kümesinden daha geniş olduğu bir örnek yardımıyla açıklandı. Bundan sonraki çalışmalarımızda; radyal epitürev kavramını genelleştirmeyi ve genelleştirilmiş epitürevin radyal epitürevle ilişkisini incelemeyi ve varlık teoremlerini ispatlamayı ümit ediyoruz.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Aubin, J-P., (1981). Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. Mathematical Analysis And Applications, New York, Part A, 160-229.
2. Aubin, J_P., ve Ekeland, I., (1984). Applied Nonlinear Analysis, Wiley, New York.
3. Aubin, J-P., and Frankowska H., (1990). Set valued analysis. Birkhauser, Boston.
4. Bazan, F.F., (2001). Optimality conditions in nonconvex set-valued optimization, Mathematical Methods of Operations Research, 53,403-417.
5. Bazan, F.F., (2003). Radial epiderivatives and asymptotic function in nonconvex vector optimization, SIAM J. Optim., 14, 284-305.
6. Chen, G.Y. and Jahn, J., (1998). Optimality conditions for set-valued optimization problems, Mathematical Methods of Operations Research, 48, 187-200.
7. Corley, H.W., (1997). Optimality conditions for maximization in partially ordered linear spaces, J. Optimization Theory and Applications, 58, 1-10.
8. Kasımbeyli, R.N., (2009). Radial epiderivatives and set-valued optimization, Optimization, 8(5), 519-532.
9. Jahn, J., ve Rauh, R.,(1997). Contingent epiderivatives and set-valued optimization, Mathematical Methods of Operations Research, 46,193-211.
10. Luc, D.T., (1989). Theory of vector optimization, Springer, Berlin.
11. Luc, D.T., (1991). Contingent derivatives of set-valued maps and applicaitons to vector optimizaiton. Math. Programming, 50,99-111.
12. Rocafellar, R.T., (1970). Convex Analysis, Princeton, New Jersey.