ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2010, Volume: 5, Number: 3, Article Number: 1A0104

ENGINEERING SCIENCES
Received: June 2009
Accepted: July 2010
Series : 1A
ISSN : 1308-7231

Müzeyyen Bulut Özek
Z. Hakan Akpolat
Firat University
muzeyyen_bulut@hotmail.com
Elazig-Turkey

BULANIK MANTIK İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM: TİP-2 BULANIK MANTIK

ÖZET

Bulanık mantık sistemlerde, kelimelerin farklı insanlar için farklı anlamlarının olması, bilginin aynı görüşte olmayan uzman grubundan alınması, bulanık mantık sistemleri harekete geçiren ölçümlerin gürültülü olması gibi nedenlerden dolayı belirsizlikler vardır. Bu makalede, bulanık mantığın yeni bir açılımı olan ve belirsizlikleri modelleyip etkisini azaltan tip-2 bulanık mantık ve tip-2 bulanık küme işlemlerine genel bir bakış sunulmuştur. Amaç, tip-2 bulanık mantık teorik konularını, tanımlamaları ve yapılan çalışmaları vurgulamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Tip-1 Bulanık Mantık, Tip-2 Bulanık Mantık, Tip-2 Bulanık Küme, Belirsizlik

A NEW APPROACH FOR FUZZY LOGIC: TYPE-2 FUZZY LOGIC

ABSTRACT

Fuzzy logic system have an uncertainty because of words mean different things to different people, data obtained from experts who don’t all agree, measurements that activate the FLS are corrupted by noise. In this paper, we present a survey of operations on type-2 fuzzy set and type-2 fuzzy logic which is a new definition of fuzzy logic, model and minimize the effect of uncertainty. The main focus of this paper is on the theoretical topics, with descriptions of what they are, and what has been accomplished.

Keywords: Type-1 Fuzzy Logic, Type-2 Fuzzy Logic, Type-2 Fuzzy Set, Uncertainty

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Tip-2 bulanık küme kavramı, ilk olarak klasik (tip-1) bulanık kümelerin bir uzantısı olarak sunulmuştur. Tip-2 bulanık kümeler, bir bulanık küme için tam bir üyelik fonksiyonunun belirlenemediği durumlarda oldukça kullanışlıdır; dolayısıyla, bu kümeler, belirsizliklerin üstesinden gelmede çok etkindir. Ancak üçüncü boyutundan dolayı çizimin zorlaşması, hesaplamaların daha karmaşık olması gibi nedenlerden tip-2 bulanık kümeleri anlamak tip-1 bulanık kümeleri anlamaktan daha zordur. Bu zorluklara rağmen tip-2 bulanık kümeler; tahmin (TSK/çelik bant sıcaklığı), kümeleme (bulanık c ortalamalar algoritması), kontrol (entegre geliştirme platformu, oransal kontrol, Buck DC-DC dönüştürücüler, robot futbol oyunları, sıvı seviyesi, otonom hareketli robotlar, doğrusal olmayan sistemlerin adaptif kontrolü), veri tabanları, karar verme, sağlık (klinik tanı, ayırıcı tanı), Hidden Markov modelleri (ses tanıma), model sınıflandırma, sinir ağları, kalite kontrol (ses hoparlörleri), kablosuz iletişim (kablosuz sensörler) vb. alanlarda uygulanmıştır [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ve 22].

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Bu makalede tip-2 bulanık mantığın daha iyi kavranmasını sağlayacak tip-2 üyelik fonksiyonu (type-2 membership function), ikincil üyelik fonksiyonu (secondary membership function), birincil üyelik (primary membership), ikinci derece (secondary grade), Belirsizliğin Ayakizi (Footprint of Uncertainty, FOU), gömülü (embedded) küme kavramları ve tip-2 bulanık küme işlemleri sunulmuştur. Amaç tip-2 bulanık mantık kullanılarak yapılacak çalışmalara ışık tutmaktır.

3. TİP-2 ÜYELİK FONKSİYONLARI (TYPE-2 MEMBERSHIP FUNCTION)

Bulanık mantık sistemlerde üyelik fonksiyonları, giriş ve çıkışlarla ilişkili olarak kuralların varsayım (antecedent) ve sonuç (consequent) kısımlarında yer alır. Bulanık kümeleri tanımlayan üyelik fonksiyonları tip-1 ve tip-2 olmak üzere ikiye ayrılabilir. Belirsizliği daha iyi ifade edebilme gücü olan tip-2 bulanık mantık için tanımlanan üyelik fonksiyonları, klasik bulanık mantık olarak bilinen tip-1 üyelik fonksiyonlarından yola çıkılarak incelenecektir.

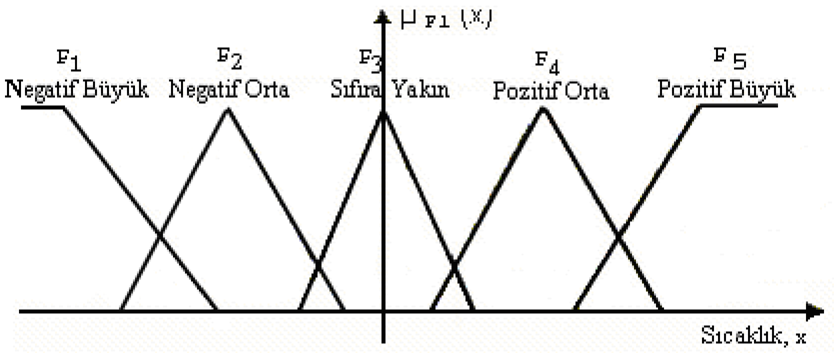
Tek değişkenli A tip-1 bulanık kümesi

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid \forall x \in X\} \quad (1)$$

olarak gösterilir.

Tüm $x \in X$'ler için tip-1 üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ 0 ile 1 arasında olmalıdır. Tip-1 üyelik fonksiyonu iki boyutludur.

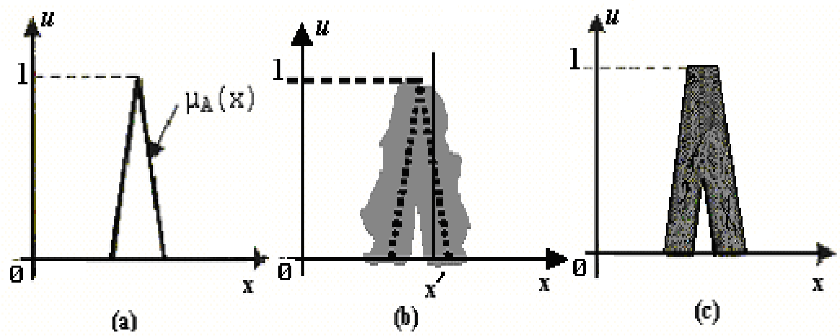
Üyelik fonksiyonundaki dilsel etiketlerin seçimi serbesttir. Örneğin Şekil 1'de sıcaklık için beş tane dilsel etiket tanımlanmıştır (Negatif Büyük, Negatif Orta, Sıfıra Yakın, Pozitif Orta, Pozitif Büyük). Ayrıca üçgen şeklinde üyelik fonksiyonları kullanılmıştır. Üyelik fonksiyonlarını çizerken üçgenlerin merkezlerinin nerede olacağı, taban genişliklerinin ne kadar olacağı, ne kadar üst üste binecekleri gibi kararlar önemlidir. Tip-2 bulanık küme ve üyelik fonksiyonlarının belirsizliği modelleme özelliğinden dolayı bu kararların çoğuna ihtiyaç duyulmamaktadır [23, 24, 25 ve 26].



Şekil 1. Tip-1 üyelik fonksiyonları
(Figure 1. (Type-1 membership functions))

Elemanların üyeliği 0 veya 1 olarak belirlenemediğinde tip-1 bulanık kümeler kullanılır. Benzer şekilde koşullar çok bulanıksa yani üyelik derecesini [0, 1] arasında belirlemede problem yaşanıyorsa, tip-2 bulanık kümeler kullanılır. (Bu fikir ilk kez 1975 yılında Zadeh tarafından ileri sürülmüştür) [27]. Ancak bu görüş tip-2 kümeleri kullanmak için olağanüstü bulanık koşullara sahip olunması gerektiği anlamında değildir. Eğer belirsizliğin tam değeri belirlenemiyorsa (üyelik derecesi net olarak belirlenemiyorsa), tip-1 yerine tip-2 bulanık kümeleri kullanmak daha doğru olacaktır. Bu şekilde düşünüldüğünde, belirsizliği sonlu tipte bir bulanık kümenin temsil edemeyeceği söylenebilir. Bu durumda, belirsizliği tamamen göstermek için tip-∞ bulanık kümesini kullanma ihtiyacı duyulur. Ancak pratikte bu mümkün değildir. Bu yüzden bazı sonlu tip bulanık kümeler kullanılır.

Şekil 2 (a)'daki tip-1 üyelik fonksiyonu üçgenin solundan ve sağından çeşitli miktarlarda noktaları kaydırılarak bulanıklaştırılmış olsun. Şekil 2 (b)'ye bakılırsa x'de dikey çizginin bulanık kısımla kesiştiği noktalarda üyelik fonksiyonu birden fazla değer almıştır. Bu değerler aynı ağırlığa sahip olmak zorunda değildir ve bu noktalara bir genlik dağılımı uygulanabilir. Bu bütün $x \in X$ için yapılırsa tip-2 bulanık kümeleri tanımlayan üç boyutlu üyelik fonksiyonu yani tip-2 üyelik fonksiyonu elde edilir.



Şekil 2. a) Tip-1 üyelik fonksiyonu (b) Bulanıklaştırılmış tip-1 üyelik fonksiyonu c) FOU(Belirsizliğin Ayak İzi)
(Figure 2. (a) Type-1 membership function (b) Blurred type-1 membership function c) FOU)

Bir tip-2 bulanık kümesi $\tilde{A}$ ile gösterilir ve $x \in X$, $u \in J_x \subseteq [0,1]$ olmak üzere tip-2 üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ şeklinde tanımlanır, yani

$$\tilde{A} = \{((x,u), \mu_{\tilde{A}}(x,u)) \mid \forall x \in X, \ \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\} \quad 0 \le \mu_{\tilde{A}}(x,u) \le 1 \tag{2}$$

olarak ifade edilir.

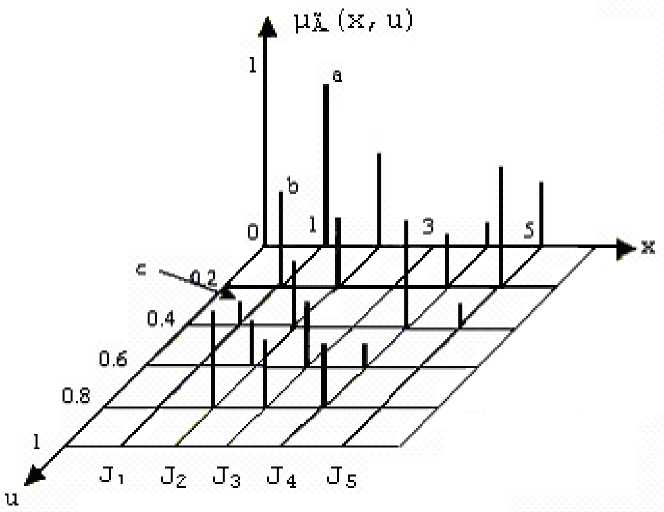
$\tilde{A}$ ayrıca

$$\tilde{A} = \int_{x\in X} \int_{x \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x,u) / (x,u) \qquad J_x \subseteq [0,1] \tag{3}$$

şeklinde de gösterilebilir [28].

Denklem (3)'deki $\int\int$ x ve u'nun birleşimini gösterir.

Örnek 1: Şekil 3 ayrık x ve u için $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$'i gösterir. Burada X={1,2,3,4,5} U={0,0.2,0.4,0.6,0.8,1} J1={0,0.2,0.4} J2={0,0.2,0.4,0.6,0.8} J3={0.6,0.8} J4=J2 J5=J1'dir. Bu değerler $\mu_{\tilde{A}}(x,u) \neq 0$ olduğu durumlar için verilmiştir. Her dikey çizgi (x,u) çiftine karşılık gelen $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ değerini temsil eder.



Şekil 3. Örnek bir ayrık tip-2 üyelik fonksiyonu
(Figure 3. Example of a type-2 membership function)

Denklem (2)'deki $\forall u \in J_x \subseteq [0,1]$ sınırlaması tip-1 üyelik fonksiyonundaki $0 \le \mu_A(x) \le 1$ ile aynıdır. Yani bulanıklaştırma olmazsa $u = \mu_A(x)$ ve $0 \le \mu_A(x) \le 1$ şartıyla tip-2 üyelik fonksiyonu tip-1 üyelik fonksiyonuna indirgenebilir.

Tanım 1: x'in her değerinde $(x = x')$, u ve $\mu_{\tilde{A}}(x',u)$ eksenleri $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$'ın dikey parçasıdır. $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$'ın dikey parçası ikincil üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{x\in J_{x'}} f_{x'}(u) / u \quad J_{x'} \subseteq [0,1], \ 0 \le f_{x'}(u) \le 1 \tag{4}$$

Tip-1 bulanık küme olan ikincil üyelik fonksiyonu, ikincil küme olarak da gösterilebilir. Bu görüşe dayanarak tip-2 bulanık küme tüm ikincil kümelerin birleşimi olarak

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid \forall x \in X\} \tag{5}$$

veya

$$\tilde{A} = \int_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x\in X} \left[\int_{u\in J_x} f_x(u) / u\right] \Big/ x \qquad J_x \subseteq [0,1] \tag{6}$$

şekillerinde de tanımlanabilir [29].

Tanım 2: İkincil üyelik fonksiyonunun domeni x'in birincil üyeliği olarak adlandırılır. Denklem (6)'da $\forall x \in X$ için $J_x \subseteq [0,1]$'de x'in birincil üyeliği J_x'dir.

Tanım 3: İkincil üyelik fonksiyonunun genliği ikinci derece (seviye) olarak adlandırılır. Denklem (6)'da $f_x(u)$, denklem (2)'de $\mu_{\tilde{A}}(x', u')\,(x' \in X, u' \in J_{x'})$ ikinci derecedir.

Eğer X ve J_x ayrılırsa, denklem (6)'nın sağ tarafı

$$\tilde{A} = \sum_{x\in X}\left[\sum_{u\in J_x} f_x(u) / u\right] \Big/ x$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{u\in J_{x_i}} f(x_i(u) / u\right] \Big/ x_i$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{M_1} f_{x_1}(u_{1k}) / u_{1k}\right] \Big/ x_1 + \ldots + \left[\sum_{k=1}^{M_N} f_{x_N}(u_{Nk}) / u_{Nk}\right] \Big/ x_N \tag{7}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde x, N değere ve her bir u değeri de M_i değere ayrılmıştır. Eğer ayırma işleminde u_{ik}'lar eşitse $M_1=M_2=\ldots=M_N \equiv M$ olur.

İkincil üyelik fonksiyonlarını tanımlamada çok sayıda seçenek vardır. Genelde ikincil üyelik fonksiyonunun ismi ile tip-2 üyelik fonksiyonunun ismi birlikte kullanılır. Örneğin ikincil üyelik fonksiyonu Gaussian ise $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ Gaussian tip-2 üyelik fonksiyonu olarak söylenir.

Ayrıca tip-1 bulanık kümeler $1/\mu_F(x)/x$ veya $1/\mu_F(x) \;\; \forall x \in X$ şeklinde tip-2 bulanık kümeler olarak da gösterilebilir. $1/\mu_F(x)$'in anlamı, ikinci derece=1 olduğunda ikincil üyelik fonksiyonunun domeninde ($\mu_F(x)$ birincil üyeliğinde) sadece bir değere sahip olmasıdır.

Örnek 2: Şekil 3'den görüldüğü gibi x=1'de ikincil üyelik fonksiyonu a/0+b/0.2+c/0.4, birincil üyelik değerleri u=0,0.2,0.4 ve ikinci dereceleri sırasıyla a,b,c'dir.

Örnek 3: $\forall x \in X$ için $f_x(u) = 1, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]$ ise ikincil üyelik fonksiyonu aralıklı (interval) kümedir [30 ve 31]. Aralıklı ikincil üyelik fonksiyonları x'in birincil üyeliğindeki belirsizliği yansıtır.

Aralıklı kümeler alan aralığıyla [l,r] veya [c-s,c+s] şeklinde ifade edilir.

l→sol bitiş noktası c=(l+r)/2
r→sağ bitiş noktası s=(r-l)/2

Tanım 4: Tip-2 bulanık kümenin her ikincil üyelik fonksiyonunun, 1 değerine eşit sadece bir tane ikinci derecesi olduğu farz edilirse, temel (principal) üyelik fonksiyonu tüm bu noktaların birleşimi olarak kabul edilir.

$$\mu_{principal}(x) = \int_{x \in X} u / x, \qquad f_x(u) = 1 \tag{8}$$

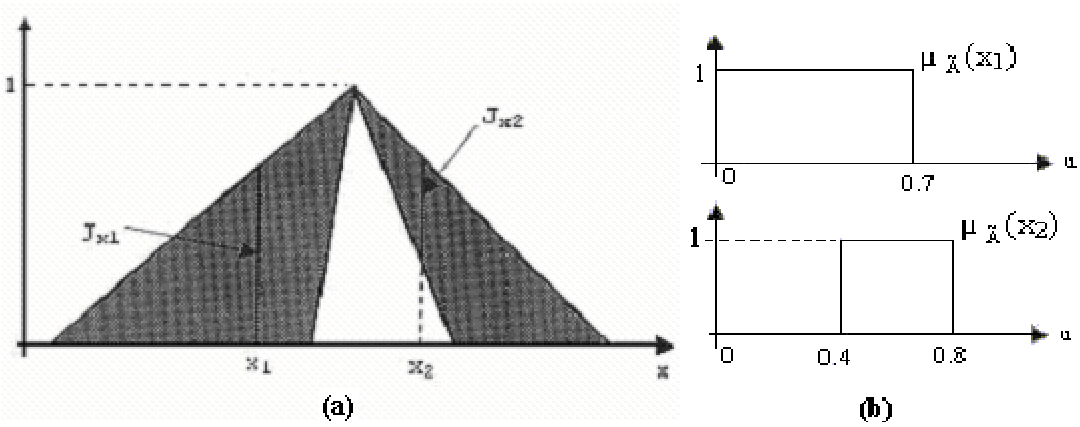
Aralıklı ikincil üyelik fonksiyonları için temel üyelik fonksiyonu ise, birincil üyeliklerin orta noktalarının birleşimi olarak tanımlanabilir.

Tanım 5: $\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin birincil üyeliğindeki belirsizlik, *Belirsizliğin Ayakizi* (Footprint of Uncertainty, FOU) olarak adlandırdığımız sınırlı bir bölgeden oluşmuştur. FOU, tüm birincil üyeliklerin birleşimidir.

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \tag{9}$$

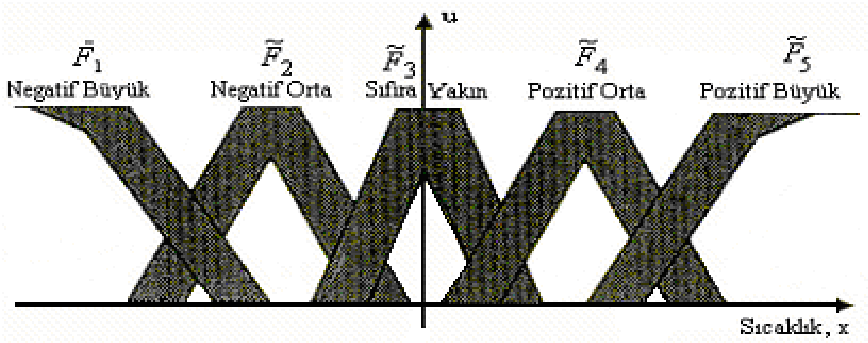
FOU çok kullanışlıdır, çünkü FOU sadece tip-2 üyelik fonksiyonuna özgü doğal belirsizliklere dikkat çekmez aynı zamanda tip-2 üyelik fonksiyonunun tüm ikinci dereceleri için çok uygun tanımlama olanağı sağlar.

Örnek 4: Şekil 4'deki taralı bölge bir FOU örneğidir. Taralı FOU bölgesi aralıklı tip-2 bulanık kümeyi ($\mu_{\tilde{A}}(x,u)$)göstermektedir. Ayrıca şekil 4 iki noktada birincil ve ikincil üyelik fonksiyonlarını da göstermektedir.



Şekil 4. (a) Tip-2 bulanık kümesi için FOU (taralı bölge), J_{x_1} ve J_{x_2} birincil üyelikleri ile $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$ ve $\mu_{\tilde{A}}(x_2)$ ikincil üyelik fonksiyonlarının x_1 ve x_2 noktalarında gösterimi
(b) Aralıklı küme olan ikincil üyelik fonksiyonları
(Figure 4. (a) FOU for a type-2 fuzzy set, The primary memberships, J_{x_1} and J_{x2} and their associated secondary membership functions $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$ and $\mu_{\tilde{A}}(x_2)$ are shown at the two points x ve x_2 (b) The secondary membership functions are interval sets)

Şekil 5'te şekil 1'in belirsiz versiyonu görülmektedir.



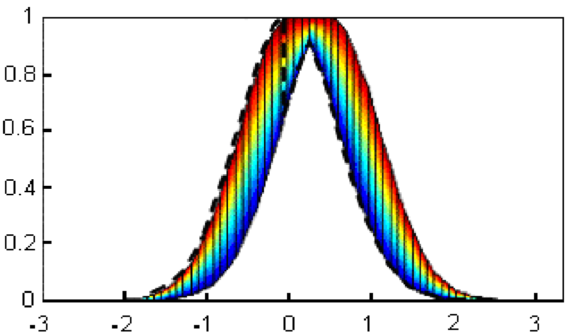
Şekil 5. Şekil 1'deki üyelik fonksiyonları için FOU'lar
(Figure 5. FOUs for the Figure 1 membership functions)

Tanım 6: $\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin, gömülü (iç içe girmiş) kümeler olarak adlandıracağımız $\tilde{A}_e$ tip-2 bulanık kümelerinin birleşiminden (toplanarak bir araya getirilmesinden) oluştuğu düşünülebilir. Burada tip-2 bulanık küme

$$\tilde{A}_e = \int_{x \in X} \left[f_x(\theta) / \theta \right] / x \qquad \theta \in J_x \subseteq U = [0,1] \tag{10}$$

olarak ifade edilir.

$\tilde{A}_e$, x'in her değerinde sadece bir tane birincil üyeliğe (θ) sahiptir. $f_x(\theta)$ ikinci derece ve $\theta \in J_x$'dir. $\tilde{A}_e$ üyelik fonksiyonunun çizimi üç boyutlu kıvrımlı bir düzleme benzer. Şekil 6'da aralıklı tip-2 kümesi için iç içe girmiş tip-2 kümesi örnek gösterilmiştir.



Şekil 6. Tip-2 bulanık kümesi içinde gömülü tip-1 küme örneği (ince aralıklı çizgi)
(Figure 6. Example of an embedded type-1 set (thick dashed line) in a type-2 fuzzy set)

Ayrık X ve U için, $\tilde{A}_e$ iç içe girmiş tip-2 kümesi N elemanlıdır ve $J_{x_1}, J_{x_2}, ..., J_{x_N}$'den $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$ olarak $f_{x_1}(\theta_1), f_{x_2}(\theta_1), ..., f_{x_N}(\theta_N)$ ikinci derecelerine sahip bir eleman içermektedir.

$$\tilde{A}_e = \sum_{i=1}^{N} \left[f_{x_i}(\theta_i) / \theta_i \right] / x_i \qquad \theta_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1] \tag{11}$$

$\tilde{A}$ içine yerleştirilmiş $\tilde{A}_e$ kümesi $\prod_{i=1}^{N} M_i \tilde{A}_e$'nin toplamıdır.

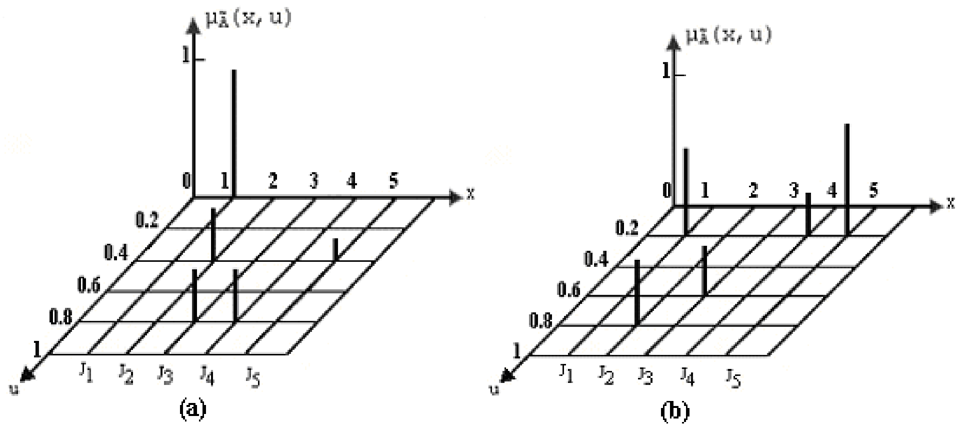
Örnek 5: Şekil 7, şekil 6'da gösterilen tip-2 üyelik fonksiyonu için 450 iç içe girmiş tip-2 kümeden iki tanesini göstermektedir.

Ayrık X ve U için, iç içe girmiş tip-1 kümesi A_e

$$A_e = \int_{x \in X} \theta / x \qquad \theta \in J_x \subseteq U = [0,1] \qquad (12)$$

olarak ifade edilir.

A_e kümesi denklem (10)'daki $\tilde{A}_e$ kümesinin tüm birincil üyeliklerinin birleşimidir ve çok sayıda A_e vardır.



Şekil 7. Şekil 3'de gösterilen tip-2 üyelik fonksiyonları ile ilişkili iç içe girmiş tip-2 kümeler örneği
(Figure 7. Example of an embedded type-2 sets, each associated with the type-2 membership function depicted in Figure 3)

Ayrık X ve U için, iç içe girmiş tip-1 kümesi A_e, $J_{x_1}, J_{x_2}, \ldots, J_{x_N}$'in her birinden N elemana sahiptir $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$.

$$A_e = \sum_{i=1}^{N} \theta_i / x_i \qquad \theta_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1] \qquad (13)$$

A_e kümesi denklem (11)'deki $\tilde{A}_e$ kümesinin tüm birincil üyeliklerinin birleşimidir ve $\prod_{i=1}^{N} M_i A_e$ 'nin toplamı kadardır.

Örnek 6: Şekil 7'de gösterilen iki iç içe girmiş tip-2 kümenin, tip-1 kümelerle birleştirilmiş şekli 0/1+0.4/2+0.8/3+0.8/4+0.4/5 ve 0.2/1+0.8/2+0.6/3+0.2/4+0.2/5 'dir.

Tanım 7: FOU, üst ve alt üyelik fonksiyonları olarak adlandırılan fonksiyonlarla da tanımlanabilir. Üst ve alt üyelik fonksiyonları $\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin FOU'sının sınırları olan iki tane tip-1 üyelik fonksiyonudur. Üst üyelik fonksiyonu $FOU(\tilde{A})$'nın üst sınırıdır ve $\forall x \in X$ için $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde gösterilir. Alt üyelik fonksiyonu $FOU(\tilde{A})$'nın alt sınırıdır ve $\forall x \in X$ için $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ şeklinde gösterilir.

$$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \overline{FOU(\tilde{A})} \qquad \forall x \in X \text{ ve } \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \underline{FOU(\tilde{A})} \qquad \forall x \in X \tag{14}$$

İkinci üyelik fonksiyonunun alanı [0,1] arasında olması gerektiğinden üst ve alt üyelik fonksiyonları her zaman vardır.

Denklem (9)'dan $\overline{FOU(\tilde{A})} = \bigcup_{x \in X} \overline{J_x}$ ve $\underline{FOU(\tilde{A})} = \bigcup_{x \in X} \underline{J_x}$ olur. $\overline{J_x}$ ve $\underline{J_x}$ J_x'in üst ve alt sınırlarını gösterir. Bundan dolayı $\forall x \in X$ için $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \overline{J_x}$ ve $\underline{\mu}(x) = \underline{J_x}$'dir.

Denklem (6), alt ve üst üyelik fonksiyonları ile

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x, u) = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] \Big/ x$$

$$= \int_{x \in X} \left[\int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} f_x(u) / u \right] \Big/ x \tag{15}$$

şeklinde ifade edilebilir.

İkincil üyelik fonksiyonları aralıklı küme ise denklem (15),

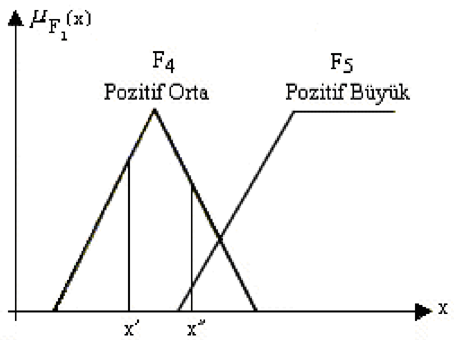
$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} 1 / u \right] \Big/ x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} 1 / u \right] \Big/ x \tag{16}$$

olarak gösterilir.

Tip-2 üyelik fonksiyonları için dilsel etiketler, alt ve üst üyelik fonksiyonlarından faydalanılarak ifade edilir. Şekil 8'de gösterilen $x = x'$ elemanında tip-1 durumu incelendiğinde, $x = x'$ durumunda bir belirsizlik yoktur. Çünkü x'in bu değeri sadece F_4=Medium Positive (Pozitif Orta) bulanık kümesinde değer almıştır. Ancak $x = x''$ elemanı, F_5=Very Positive (Pozitif Büyük) ve F_4=Medium Positive (Pozitif Orta) kümelerinin ikisinde de değer aldığından $x = x''$ elemanında durum farklıdır. Konuşma sırasında bu durum ifade edilirken, F_5'in bu kadar üyesi F_4'ün bu kadar üyesidir denilemez. Bunun yerine hangisinin daha fazla üyesi ise o üyelik fonksiyonuyla söylenir.

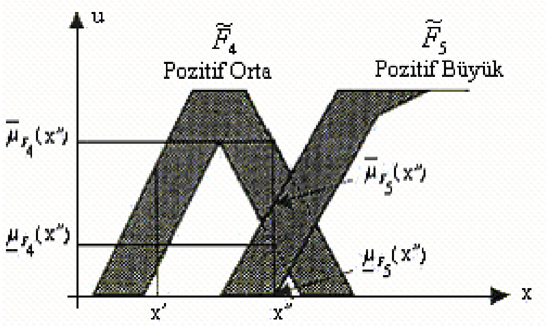
Verilen P tane bulanık küme için;

$$L(x') = \arg\max_{\forall F_i} [\mu_{F_1}(x'), \mu_{F_2}(x'), \ldots, \mu_{F_P}(x')] \text{ 'dir.} \tag{17}$$



Şekil 8. Tip-1 bulanık kümeler için dilsel etiketler
(Figure 8. Linguistic label for type-1 fuzzy sets)

Aynı şekilde şekil 9'da verilen $x = x'$ elemanında tip-2 durumu incelendiğinde, $x = x'$ durumunda yine bir sorun yoktur, dilsel etiket verilebilir. $x = x''$ iki bulanık kümenin de üyesidir ve bu şekilde tanımlamak zordur. Tanımlama için şöyle bir yaklaşım izlenmiştir:



Şekil 9. Tip-2 bulanık kümeler için dilsel etiketler
(Figure 9. Linguistic label for type-1 fuzzy sets)

$\mu_{\tilde{F}_4}(x, u)$ ve $\mu_{\tilde{F}_5}(x, u)$ tip-2 üyelik fonksiyonlarının FOU'ları sırasıyla $FOU(\tilde{F}_4)$ ve $FOU(\tilde{F}_5)$ şeklinde tanımlanır. $\bar{\mu}_{\tilde{F}_4}$ ve $\underline{\mu}_{\tilde{F}_4}$ $\tilde{F}_4$ 'ün, $\bar{\mu}_{\tilde{F}_5}$ ve $\underline{\mu}_{\tilde{F}_5}$ $\tilde{F}_5$'in üst ve alt fonksiyonlarıdır. $x = x''$ dikey çizgisinin, $\tilde{F}_4$ 'ün FOU'sı ile kesiştiği kısım incelenerek $f_{x''}(u)$ $\forall u \in [\underline{\mu}_{\tilde{F}_4}(x''), \bar{\mu}_{\tilde{F}_4}(x'')]$ ilişkisi kurulursa ikinci derece üyelik fonksiyonunun ağırlık merkezi $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_4)$ ile gösterilir[32]. Aynı şekilde $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_5)$ de bulunur ve $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_4)$ ve $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_5)$ karşılaştırılır. Eğer $f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_4) > f_{x''}^{cg}(\tilde{F}_5)$ ise x'' $\tilde{F}_4$ 'ün, değilse $\tilde{F}_5$'in üyesidir denir.

Verilen P tane tip-2 bulanık kümesi için;

$$L(x') = \arg\max_{\forall \tilde{F}_i} [f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_1), f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_2), \ldots, f_{x'}^{cg}(\tilde{F}_P)]\text{'dir.} \quad (18)$$

4. TİP-2 BULANIK KÜMELER ÜZERİNDE İŞLEMLER (OPERATIONS ON TYPE-2 FUZZY SETS)

Üyelik fonksiyonları $\mu_{F_1}(y)$ ve $\mu_{F_2}(y)$ ile tanımlı F_1 ve F_2 tip-1 bulanık kümeleri ile maximum t-norm ve minumum t-norm kullanarak yapılan birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri,

$$F_1 = \int_{y \in Y} \mu_{F_1}(y) / y \quad (19)$$

$$F_2 = \int_{y \in Y} \mu_{F_2}(y) / y \quad (20)$$

$$\mu_{F_1 \cup F_2}(y) = \max[\mu_{F_1}(y), \mu_{F_2}(y)] \quad \forall y \in Y \quad (21)$$

$$\mu_{F_1 \cap F_2}(y) = \min[\mu_{F_1}(y), \mu_{F_2}(y)] \quad \forall y \in Y \quad (22)$$

$$\mu_{\bar{F}_1}(y) = 1 - \mu_{F_1}(y) \quad \forall y \in Y \quad (23)$$

$$\mu_{\bar{F}_2}(y) = 1 - \mu_{F_2}(y) \quad \forall y \in Y \quad (24)$$

şeklinde ifade edilir [33, 34 ve 35].

Cebirsel çarpma da, diğer bir t-norm işlemidir. Genellikle bulanık kümelerin mühendislik uygulamalarında ve lojikte kullanılır.

$$\mu_{F_1 \cap F_2}(y) = \mu_{F_1}(y) \times \mu_{F_2}(y) \qquad \forall y \in Y \tag{25}$$

Genişleme İlkesi: Zadeh'in Genişleme İlkesi tip-2 bulanık kümelerin birleşim, kesişim ve tümleyen hesabında kullanılan bir araçtır [36].

$A_1, A_2, ..., A_r$ sırasıyla $X_1, X_2, ..., X_r$'de tip-1 bulanık kümeler ve $B = f(A_1, A_2, ..., A_r)$ olsun. Zadeh'in Genişleme İlkesine göre:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,...,x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_r}(x_r)\} \\ 0 \quad \text{if} \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \text{'dir.} \tag{26}$$

$y = f(x_1, \ldots, x_r)$ olduğundan, $f^{-1}(y)$ $x_1 \in X_1, \ldots, x_r \in X_r$ noktalarının kümesini gösterir.

Denklem (26)'yı elde etmek için önce $y = f(x_1, \ldots, x_r)$ için $(x_1, \ldots, x_r)$ değerleri sonra da $\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r)$ ve $\min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r)\}$ değerleri bulunmalıdır. Eğer $(x_1, \ldots, x_r)$'den oluşan birden fazla küme $y = f(x_1, \ldots, x_r)$'yi sağlarsa, bu prosedür diğerleri için de tekrarlanır ve $\mu_B(y)$ için minimaların en büyüğü seçilir.

Zadeh'in Genişleme İlkeleri minumum t-norm ve maximum t-conorm'u kullanarak tanımlanmıştır. $f(A_1, \ldots, A_r)$'yi bulmak için çarpma, toplama işlemleri kullanılmamaktadır. Bunun yerine doğrudan denklem (26)'dan çıkarılan, birleşim için maximum işlemi ve minumum için de genel t-norm (⋆) kullanılır.

$$f(A_1, \ldots, A_r) = \int_{x_1 \in X_1} \cdots \int_{x_2 \in X_2} \mu_{A_1}(x_1) \star \ldots \star \mu_{A_{1r}}(x_r) \Big/ f(x_1, \ldots, x_r) \tag{27}$$

4.1. Genel Tip-2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

Genel tip-2 bulanık kümelerin teorik ve cebirsel işlemleri için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümeleri,

$$\tilde{A} = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_x \left[\int_{J_x^u} f_x(u) / u\right] \Big/ x \qquad J_x^u \subseteq [0,1] \tag{28}$$

$$\tilde{B} = \int_x \mu_{\tilde{B}}(x) / x = \int_x \left[\int_{J_x^w} g_x(w) / w\right] \Big/ x \qquad J_x^w \subseteq [0,1] \tag{29}$$

şeklinde tanımlanabilir.

4.1.1. Teorik İşlemler

Burada $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümelerinin birleşim, kesişim ve tümleyen formülleri verilecektir.

- **Tip-2 Bulanık Kümelerinin Birleşimi**

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümelerinin birleşimi, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümelerinden farklı bir tip-2 bulanık kümedir.

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x, v) = \int_{x\in X} \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) / x = \int_{x\in X} \left[\int_{v\in J_x^v \subseteq [0,1]} h_x(v) / v \right] \Big/ x \quad (30)$$

$$\int_{v\in J_x^v \subseteq [0,1]} h_x(v) / v = \varphi\left(\int_{u\in J_x^u} f_x(u) / u, \int_{w\in J_x^w} g_x(w) / w \right) = \varphi\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \quad (31)$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ tip-1 bulanık kümelerdir. φ, ikincil üyelik fonksiyonunun t-conorm fonksiyonudur. t-conorm fonksiyonu olmasının nedeni, denklem (21)'den de görüldüğü gibi iki tane tip-1 bulanık kümenin birleşiminin üyelik fonksiyonunun t-conorm'a eşit olmasıdır.

Denklem (27)'den,

$$\varphi\left(\int_{u\in J_x^u} f_x(u) / u, \int_{w\in J_x^w} g_x(w) / w \right) = \int_{u\in J_x^u} \int_{w\in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / \varphi(u, w) \quad (32)$$

ve denklem (30), (32)'den;

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = \int_{v\in J_x^v \subseteq [0,1]} h_x(v) / v = \int_{u\in J_x^u} \int_{w\in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / (u \vee w) \qquad x \in X \quad (33)$$

olarak bulunur.

Denklemdeki $\star$minumum veya çarpmayı, $\iint$ ise $J_x^u \times J_x^w$'nin birleşimini gösterir.

Denklem (33),

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = \int_{u\in J_x^u} \int_{w\in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / v \equiv \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad x \in X \quad (34)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Denklem (34)'de $v \equiv u \vee w$ ve $\sqcup$ katılma (join) işlemini gösterir.

- **Tip-2 Bulanık Kümelerin Kesişimi**

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ tip-2 bulanık kümelerinin kesişimi $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümelerinden farklı bir tip-2 bulanık kümedir.

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x, v) = \int_{x\in X} \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) / x \quad (35)$$

$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)$ denklemi $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)$denklemi ile benzer şekilde

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \int_{u\in J_x^u} \int_{w\in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / (u \wedge w) \qquad x \in X \quad (36)$$

olarak bulunur.

Denklem (36),

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \int_{u\in J_x^u} \int_{w\in J_x^w} f_x(u) \star g_x(w) / v \equiv \mu_{\tilde{A}}(x) \ \Pi \ \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad x \in X \quad (37)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Denklem (37)'de $v \equiv u \vee w$ ve Π buluşma işlemini gösterir.

- **Tip-2 Bulanık Kümesinin Tümleyeni**

$\tilde{A}$ tip-2 bulanık kümesinin tümleyeni, $\tilde{A}$ kümesinden farklı bir tip-2 bulanık kümedir.

$$\bar{\tilde{A}} \Leftrightarrow \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x, v) = \int_{x \in X} \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) / x \quad (38)$$

Denklem (23) ve (27)'den,

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = \int_{u \in J_x^u} f_x(u) / (1 - u) \equiv \neg\mu_{\tilde{A}}(x) \qquad x \in X \quad (39)$$

olarak bulunur.

$\neg$ olumsuzluk (negation) işlemini gösterir.

Örnek 3-1: $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5/0 + 0.7/0.1$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x) = 0.3/0.4 + 0.9/0.8$ olsun.

Denklem (34)'den

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x) = (0.5/0 + 0.7/0.1) \sqcup (0.3/0.4 + 0.9/0.8)$$

$$= \frac{0.5 \wedge 0.3}{0 \vee 0.4} + \frac{0.5 \wedge 0.9}{0 \vee 0.8} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{0.1 \vee 0.4} + \frac{0.7 \wedge 0.9}{0.1 \vee 0.8}$$

$=0.3/0.4+0.5/0.8+0.3/0.4+0.7/0.8$

$=\max\{0.3,0.3\}/0.4+\max\{0.5,0.7\}/0.8$

$=0.3/0.4+0.7/0.8$

Denklem (37)'den

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcap \mu_{\tilde{B}}(x) = (0.5/0 + 0.7/0.1) \sqcap (0.3/0.4 + 0.9/0.8)$$

$$= \frac{0.5 \wedge 0.3}{0 \wedge 0.4} + \frac{0.5 \wedge 0.9}{0 \wedge 0.8} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{0.1 \wedge 0.4} + \frac{0.7 \wedge 0.9}{0.1 \wedge 0.8}$$

$=0.3/0+0.5/0+0.3/0.1+0.7/0.1$

$=\max\{0.3,0.5\}/0+\max\{0.3,0.7\}/0.1$

$=0.5/0+0.7/0.1$

Denklem (39)'dan

$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = \neg\mu_{\tilde{A}}(x)=0.5/(1-0)+0.7/(1-0.1)=0.5/1+0.7/0.9$ olarak bulunur.

4.1.2. Cebirsel İşlemler

Çarpma ve toplama gibi cebirsel işlemler genişleme ilkesinden faydalanılarak tanımlanmıştır.

- **Toplama İşlemi**

F ve G bulanık kümelerinin toplamı,

$$F = \int_{u \in U} f(u) / u \qquad G = \int_{w \in W} g(w) / w$$

$$F + G = \int_{u \in U} \int_{w \in W} [f(u) \star g(w)] / (u + w) \quad (40)$$

olarak ifade edilir.

$\star$ t-norm minumum veya çarpmayı gösterir.

- **Çarpma İşlemi**

F ve G bulanık kümelerinin çarpımları,

$$F \times G = \int_{u\in U}\int_{w\in W} [f(u) \star g(w)] / (u \times w) \quad (41)$$

olarak ifade edilir.

$\star$t-norm minumum veya çarpmayı gösterir.

4.2. Aralıklı Tip-2 bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

Aralıklı tip-2 bulanık kümeler, işlemlerinin kolay olması nedeniyle tip-2 bulanık kümelerden daha çok kullanılırlar.

4.2.1. Teorik İşlemler

Burada aralıklı tip-2 bulanık kümeler için katılma ve buluşma işlemleri verilecektir.

- **Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Katılma (Join) İşlemi**

F ve G $[l_f, r_f]$, $[l_g, r_g]$ aralığında tanımlı iki aralıklı tip-1 bulanık küme olsun. F ve G arasındaki katılma işlemi, $J_x^u = [l_f, r_f]$ ve $J_x^w = [l_g, r_g]$ olarak belirtilirse,

$$F \sqcup G = \int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} 1 / (u \vee w) \quad (42)$$

şeklinde ifade edilir.

n=k ise:

$$F_1 \sqcup F_2 \sqcup \ldots \sqcup F_k = \int_{q\in[(l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_k),(r_1\vee r_2\vee\cdots\vee r_k)]} 1/q \quad (43)$$

n=k+1 ise:

$$F_1 \sqcup F_2 \sqcup \ldots \sqcup F_{k+1} = (F_1 \sqcup F_2 \sqcup \ldots \sqcup F_k) \sqcup F_{k+1}$$

$$= \left[\int_{q\in[(l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_k),(r_1\vee r_2\vee\cdots\vee r_k)]} 1/q\right] \sqcup \left[\int_{w\in[l_{k+1},r_{k+1}]} 1/w\right]$$

$$= \left[\int_{g\in[(l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_k)\vee l_{k+1},(r_1\vee r_2\vee\cdots\vee r_k)\vee r_{k+1}]} 1/g\right]$$

$$= \left[\int_{g\in[(l_1\vee l_2\vee\cdots\vee l_k\vee l_{k+1}),(r_1\vee r_2\vee\cdots\vee r_k\vee r_{k+1})]} 1/g\right]\text{'dir.} \quad (44)$$

- **Tip-2 Bulanık Kümeler İçin Buluşma (Meet) İşlemi**

F ve G arasındaki buluşma işlemi $J_x^u = [l_f, r_f]$ ve $J_x^w = [l_g, r_g]$ olarak tanımlanırsa t-norm çarpma işlemi kullanılarak,

$$F \sqcap G = \int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} (1 \times 1) / (uw) \quad (45)$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.2.2. Cebirsel İşlemler

Aralıklı tip-2 bulanık kümelerin cebirsel işlemleri için toplama ve çarpma işlemleri incelenecektir.

- **Toplama İşlemi**

F, $[l_f, r_f]$ ve G, $[l_g, r_g]$ aralığında tanımlı iki aralıklı tip-1 bulanık küme olsun. Denklem (51) kullanılarak F ve G'nin cebirsel toplamı

$$F + G = \int_{u\in[l_f,r_f]} \int_{w\in[l_g,r_g]} 1 \star 1 / (u + w) \qquad (46)$$

olarak bulunur.

- **Çarpma İşlemi**

Denklem (45) çapma işlemi için de geçerlidir.

5. SONUÇ (CONCLUSION)

Genel ve aralıklı tip-2 bulanık kümeler üzerinde dünya çapında birçok çalışma yapılmış ve yapılmaya devam edilmektedir. Tip-1 bulanık mantık kullanılarak yapılan çalışmalar, tip-2 bulanık mantık kullanılarak da yapılmaya çalışılmaktadır. Ayrıca Zadeh'in kelimelerle işlem (Computing With Words) modelini gerçekleştirmek için de aralıklı tip-2 bulanık mantık sistemler kullanılmıştır.

Bu makale çalışmasında, tip-2 bulanık mantık ve tip-2 bulanık kümeler ile makaleler üzerinde geniş bir literatür taraması yapılmıştır. Özellikle, tip-2 bulanık küme işlemleri tip-1 bulanık kümeler ile birlikte detaylı olarak anlatılarak bu konunun önemi vurgulanmıştır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Mendel, J.M., (2007). Advances in type-2 fuzzy sets and systems, Information Sciences, 177, pp:84–110.
2. Wu, K.C., (1996). Fuzzy Interval Control of Mobile Robots, Computers Elect. Eng., vol:22, pp:211-229.
3. John, R.I., Innocent, P. R. and Barnes, M. R., (July 1997). Type-2 Fuzzy Sets and Neuro-Fuzzy Clustering or Radiographic Tibia Images, in Proc. of Sixth Int'l. Conf. on Fuzzy Systems, pp:1375-1380, Barcelona, Spain.
4. Chaneau, J.L., Gunaratne, M., and Altschaeffl, A.G., (1987) An Application of Type-2 Sets to Decision Making in Engineering, in Analysis of Fuzzy Information, vol. II: Artificial Intelligence and Decision Systems (J. Bezdek, Ed.), CRC, Boca Raton, FL.
5. Chiang, D.A., Chow, L.-R. and Hsien, N.-C., (Nov. 1997). Fuzzy Information in Extended Fuzzy Relational Databases, Fuzzy Sets and Systems, vol:92, pp:1-20.
6. Crowder, R.S., (1990). Predicting the Mackey-Glass Time Series With Cascade-Correlation Learning, in Proc. Connectionist Models Summer School, Carnegie Mellon Univ., pp:117-123.
7. Cybenko, G., (1989). Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function, Mathematics of Control, Signals, and Systems.
8. Mouzouris, G.C. and Mendel, J.M., (1997). A Singular-Value-QR Decomposition Based Method for Training Fuzzy Logic Systems in Uncertain Environments, J. of Intelligent and Fuzzy Systems, vol:5, pp:367-374.

9. Mouzouris, G.C. and Mendel, J.M., (1996). Designing Fuzzy Logic Systems for Uncertain Environments Using a Singular-Value-QR Decomposition Method, Proc. of the Fifth IEEE Int'l. Conf. On Fuzzy Systems, New Orleans, LA.
10. Bulut, M., (2004). Tip-2 bulanık mantık sistemlerin benzetimi için yazılım geliştirme. Yüksek Lisans Tezi. Elazığ: Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
11. Wang, L.-X., (1997). A Course in Fuzzy Systems and Control. Prentice-Hall, NJ, USA.
12. Passino K.M. and Yurkovich, S., (1998). Fuzzy Control. Addison-Wesley, USA.
13. Agüero, J.R. and Vargas, A., (2007). Calculating function of interval type-2 fuzzy numbers for fault current analysis, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 15, pp. 31-40.
14. Astudillo, L., Castillo, O., Aguilar, L.T., and Martinez, R., (2007). Hybrid control for an autonomous wheeled mobile robot under perturbed torques, in Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing (P. Melin et al, Eds.), Proc. of IFSA 2007, Cancun, Mexico, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 594-603.
15. Cao, J., Liu, H., Li, P., and Brown, D., (2008). Adaptive Fuzzy Logic Controller for Vehicle Active Suspensions with Interval Type-2 Fuzzy Membership Functions, Proc. IEEE FUZZ Conference, Paper # FS0029, Hong Kong, China.
16. Castillo, O. and Melin, P., (2004). Adaptive Noise Cancellation Using Type-2 Fuzzy Logic and Neural Networks, Proc. IEEE FUZZ Conference, Budapest, Hungary.
17. Castillo, O., Huesca, G., and Valdez, F., (2005). Evolutionary Computing for Optimizing Type-2 Fuzzy Systems in Intelligent Control of Non-Linear Dynamic Plants, Proc. North American Fuzzy Info. Processing Society (NAFIPS), pp. 247-251, Ann Arbor, MI.
18. Castro, J.R., Castillo, O., Melin, P., Rodríguez-Díaz, A., and Martinez, L.G., (2008). Intelligent Control Using an Interval Type-2 Fuzzy Neural Network with a Hybrid Learning Algorithm, Proc. IEEE FUZZ Conference, Paper # FS0224, Hong Kong, China.
19. Gupta, R.K., Pareek, U., and Kar, I.N., (2007). Soft Computation of Turbine Inlet Temperature of Gas Turbine Power Plant Using Type-2 Fuzzy Logic Systems, Proc. IEEE FUZZ Conference, pp. 309-314, London, UK.
20. Hagras, H., (2004). A Hierarchical Type-2 Fuzzy Logic Control Architecture for Autonomous Mobile Robots, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 12 No. 4, pp. 524-539.
21. Lin, P.-Z., Hsu, C.-F., and Lee, T.-T., (2005). Type-2 Fuzzy Logic Controller Design for Buck DC-DC Converters, Proc. IEEE FUZZ Conference, pp. 365-370, Reno, NV.
22. Liu, Z., Zhang, Y., and Wang, Y., (2007). A type-2 fuzzy switching control system for biped robots, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol. 37, pp. 1202-1213.
23. Mizumoto, M. and Tanaka, K., (1976). Some Properties of Fuzzy Sets of Type-2, Information and Control, vol:31, pp:312-340.
24. John, R.I. and Mendel, J.M., (2002). Type-2 Fuzzy Sets Made Simple, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol:10, no:2, pp:117-127.
25. Klir, G.J. and Folger, T.A., (1988). Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
26. Dubois, D. and Prade, H., (1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, NY.
27. Mendel, J.M., (2001) Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions. Prentice-Hall, NJ, USA.

28. Castillo, O. and Melin, P., (2008). Type-2 Fuzzy Logic Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin.
29. Karnik, N.N. and Mendel, J.M., (2001). Operations on Type-2 Fuzzy Sets, On Fuzzy Sets and Systems, 122, pp:327-348.
30. Hisdal, E., (1981). The IF-THEN ELSE Statement and Interval-Values Fuzzy Sets of Higher Type, Int’l. J. Man-Machine Studies, vol:15, pp:385-455.
31. Bustince, H. and Burillo, P., (2000). Mathematical Analysis of Interval-valued Fuzzy Relations: Application to Approximate Reasoning, Fuzzy Sets and Systems, vol:113, pp:205-219.
32. Karnik, N.N. and Mendel, J.M., (2001). Centroid of a Type-2 Fuzzy Set, Information Sciences, 132, pp:195-220.
33. Kaufman, A. and Gupta, M.M., (1991). Introduction to Fuzzy Aritmetic: Theory Applications, Van Nostrand Reinhold, NY.
34. Dubois, D. and Prade, H., (1978). Operations on Fuzzy Numbers, Int. J. Systems Science, vol. 9, pp:613-626.
35. Mizumoto, M. and Tanaka, K., (1981). Fuzzy Sets of Type-2 Under Algebraic Product and Algebraic Sum, Fuzzy Sets and Systems, vol:5, pp:277-290.
36. Yager, R.R., (1986). A Characterization of the Fuzzy Extension Principle, J. Fuzzy Sets and Systems, vol:18, pp:205-217.