ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2010, Volume: 5, Number: 4, Article Number: 3A0028

EDUCATION SCIENCES
Received: August 2010
Accepted: September 2010
Series : 1C
ISSN : 1308-7274

Mehmet TEKTAŞ
Marmara University
tektas@marmara.edu.tr
İstanbul-Turkey

OPTİMİZASYON TEKNİKLERİNİN TASNİFİ VE İKİ TEKNİK ÜZERİNDE İNCELEME

ÖZET

Değişen teknolojilerin, sınırlı kaynakların, artan rekabetin ve karmaşık hale gelen sistemlerin doğurduğu problemlerin klasik yöntemlerle (matematiksel veya olmayan, analitik ve sayısal)çözümünün güçleşmesi optimizasyon kavramını gündeme getirmiştir. Optimizasyon, en iyi amaç kriterinin en iyi değerini veren kısıtlardaki değişkenlerin değerini bulmaktır.

Bütün optimizasyon problemlerinin çözümü için etkili tek bir metot olmadığından optimizasyon tekniklerini tek-çok değişkenli, kısıtlı-kısıtsız, direkt-indirekt olmak üzere üç ana başlık altında tasnif edebiliriz. Bu tasnif çerçevesinde; çok değişkenli, kısıtsız, türev kullanmayan teknikleri temsilen Nelder – Mead metodu ve çok değişkenli, kısıtlı, türev kullanan teknikleri temsilen Frank – Wolfe metodu ele alınmış ve iki boyutlu problemler için yazılan program kullanılarak birer uygulama yardımıyla performansları yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Optimizasyon Teknikleri, Nelder-Mead, Frank-Wolfe

CLASSIFICATION OF OPTIMISATION TECHNICS AND ANALYZING ON TWO TECHNICS

ABSTRACT

Effective method for solving optimization problems is not one, this technique one-to-many variables, limited-constraint-free, direct-indirect to be classified under three main headings.
Within the framework of this sort; to represent multivariate, unconstraints and does not use derivative techniques, Nelder - Mead method was selected and to represent multivariate, constrained and used derivative techniques , the Frank - Wolfe method was selected. Finally, by using the program, two-dimensional problems are considered for two technics and application performances are interpreted.

Keywords: Optimisation Technics,Nelder-Mead,Frank-Wolfe

1.GİRİŞ(INTRODUCTION)

En basit anlamı ile optimizasyon eldeki kısıtlı kaynakları en optimum biçimde kullanmak olarak tanımlanabilir[1].Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse optimizasyon kısaca bir fonksiyonun minimize veya maksimize edilmesi olarak tanımlanabilir[2]. Diğer bir değişle optimizasyon "en iyi amaç kriterinin en iyi değerini veren kısıtlardaki değişkenlerin değerini bulmaktır " [3].

Başka bir tanımlama ile "belirli amaçları gerçekleştirmek için en iyi kararları verme sanatı" veya "belirli koşullar altında herhangi bir şeyi en iyi yapma" [4] olarak da tanımlanan optimizasyon kısaca "en iyi sonuçları içeren işlemler topluluğudur" [5].Optimizasyonda bir amaç da maksimum kâr veya minimum maliyeti sağlayacak üretim miktarını kısıtlara bağlı olarak tespit etmektir. Günümüzün bilgisayar teknolojisi kadar güncel bir kavram olan optimizasyon kavramı çok çeşitli endüstri kesimlerinde uygulama olanağı bulmuştur.

Değişen teknolojilerin, sınırlı kaynakların, artan rekabetin, karmaşık hale gelen sistemlerin doğurduğu problemlerin klasik yöntemlerle (matematiksel veya matematiksel olmayan, analitik veya sayısal) çözümünün güçleşmesi optimizasyon kavramını güncelleştiren en önemli sebeptir. Bu yönüyle optimizasyonun kullanılmadığı bir bilim dalı hemen hemen yok gibidir [6].

En basit anlamı ile optimizasyon eldeki kısıtlı kaynakları en optimum biçimde kullanmak olarak tanımlanabilir[1].Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse optimizasyon kısaca bir fonksiyonun minimize veya maksimize edilmesi olarak tanımlanabilir[2]. Diğer bir değişle optimizasyon "en iyi amaç kriterinin en iyi değerini veren kısıtlardaki değişkenlerin değerini bulmaktır " [3].

Başka bir tanımlama ile "belirli amaçları gerçekleştirmek için en iyi kararları verme sanatı" veya "belirli koşullar altında herhangi bir şeyi en iyi yapma" [4] olarak da tanımlanan optimizasyon kısaca "en iyi sonuçları içeren işlemler topluluğudur" [5].Optimizasyonda bir amaç da maksimum kâr veya minimum maliyeti sağlayacak üretim miktarını kısıtlara bağlı olarak tespit etmektir. Günümüzün bilgisayar teknolojisi kadar güncel bir kavram olan optimizasyon kavramı çok çeşitli endüstri kesimlerinde uygulama olanağı bulmuştur.

Değişen teknolojilerin, sınırlı kaynakların, artan rekabetin, karmaşık hale gelen sistemlerin doğurduğu problemlerin klasik yöntemlerle (matematiksel veya matematiksel olmayan, analitik veya sayısal) çözümünün güçleşmesi optimizasyon kavramını güncelleştiren en önemli sebeptir.Bu yönüyle optimizasyonun kullanılmadığı bir bilim dalı hemen hemen yok gibidir [6].

2.ÇALIŞMANIN ÖNEMİ(RESEARCH SIGNIFICANCE)

Lisans öğretiminde matematiğin gerçek hayat problemlerine uygulanmasına yönelik yeterli zaman ayrılamamaktadır. Lisansüstü öğretiminde öğrencinin bu açığını kapatmada matematik düşüncenin kazandırılması ve günümüzün bilgisayar teknolojisine paralel olarak önemli örneklerin incelenmesi gereklidir. Bu anlamda,işletmelerin minimum maliyet (maksimum kar) amacına yönelik lineer programlama konuları ve bilgisayar destekli uygulamaları ve buna paralel olarak en kısa yol problemi,yatırım problemi vb. gibi pek çok gerçek hayat problemini çözmekte kullanılan dinamik programlama,tamsayılı programlama vb. gibi optimizasyon tekniklerini öğrenmeleri gereklidir. Bu çalışmanın önemi, atölye tezgah optimizasyonundan, gezgin satıcı problemine çok değişkenli fonksiyonların optimizasyonundan nonlineer sistemlerin optimizasyonuna kadar geniş bir alanda kullanılan Optimizasyon teknikleri ve tasnifini içermesidir.

3.YÖNTEM (METHOD)

Bu çalışmada Optimizasyon teknikleri tek-çok değişkenli, kısıtlı-kısıtsız, direkt-indirekt olmak üzere üç ana başlık altında tasnif edilmiştir. Bu çalışmada ele alınan Nelder – Mead ve Frank – Wolfe metotlarını diğer optimizasyon metotları içindeki yerleri ve önemleri açısından ele alınmış ve bunlar genel sınıflandırma içinde kısıtsız, kısıtlı, direkt (doğrudan arama = türevsiz) ve indirekt (türevli = gradient) yöntemlerini temsil ettiği örneklerle açıklanmıştır.

4.OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN ÖZELLİKLERİ VE ÇÖZÜM AŞAMALARI (PROPERTIES OF OPTIMIZATION PROBLEM AND STAGES OF SOLUTION)

Bir optimizasyon probleminin temel özelliği üç kategoriye ayrılmasıdır. Bunlar :

- En az bir amaç fonksiyonunun optimize edilmesi
- Eşitlik kısıtları
- Eşitsizlik kısıtlarıdır

Yani genel bir optimizasyon problemi:

maksimum (minimum) f(x)

$g_i(x) \leq 0, (\geq 0)$ i = 1, 2, …….., m

veya

$h_i(x) = 0$ i = m + 1, m + 2, ………, n

şeklindedir.Bu tanım altında amaç fonksiyonunun en iyi değerini veren

$X = (x_1, x_2, ... x_n)^T$

n – boyutlu çözüm vektörüne model vektörü de denir[3].

(1) ile ifade edilen genel problemde f(x) amaç fonksiyonunu, $g_i(x)$ eşitsizlik kısıtları ve $h_i(x)$ eşitlik kısıtları temsil eder. n'in sıfır olması problemin kısıtsız olması, sıfırdan farklı olması da problemin kısıtlı olması anlamına gelir.

Genel bir optimizasyon probleminin çözümü altı adımda gerçekleştirilir.

i. İşlem analiz edilerek işlem değişkenlerinin bütün bir listesi çıkarılır.
ii. Optimizasyon için amaç fonksiyonunu tanımlayacak kriter belirlenir.
iii. Matematiksel ifadelerle kullanılabilir bir işlem gerçekleştirilir.
iv. Problem çok büyükse;
   a) Kontrol edilebilir ve modeli basitleştirilir.
   b) Amaç fonksiyonu tekniği matematiksel ifadeye uygulanır.
v. Uygun optimizasyon tekniği matematiksel ifadeye uygulanır.
vi. Cevaplar kontrol edilir[3].

Bütün optimizasyon problemlerinin çözümü için etkili tek bir metot olmadığından optimizasyon metotları optimizasyon problemlerinin farklı tiplerinin çözümü için geliştirilmiştir[5].

Amaç fonksiyonunun yorumlanması konusunda kısıtlarda ve (veya) kısıtsız problemde yer alan değişkenlerin (karar değişkenleri) "en iyi seçmedeki kriter" programlamada amaç fonksiyonu olarak adlandırılır. Pratikte ise kısıtlarda ve amaç fonksiyonunda yer alacak değişkenlerin (kıt kaynakların) en iyi değerlerini bulmak olarak tanımlanabilir[3].

5.OPTİMİZASYON METOTLARININ GENEL TASNİFİ (GENERAL CLASSIFICATION OF OPTIMIZATION METHODS)

Bütün optimizasyon problemlerinin çözümü için etkili tek bir metot olmadığından optimizasyon tekniklerini tek-çok değişkenli, kısıtlı-kısıtsız, direkt-indirekt olmak üzere üç ana başlık altında tasnif edebiliriz.

6.TASNİF(CLASSIFICATION)

Klasik Optimizasyon Metotları:
- Lagrange Çarpanlar Metodu,Jacobian (Kısıtlı Türevler) Metodu, Karush–Kuhn– Tucker Metodu [5]

Statik Optimizasyon Metotları
- Bir Boyutlu Kısıtsız Optimizasyon Metotları
  - Arama Metotları
    - Fibonacchi Arama,Altın Oran Metodu,Ayrıntılı Arama Metodu Çatallaşma Arama Metodu,Sınırsız Arama Metodu,Karesel İnterpolasyon Metodu,Rastgele Arama Metodu [1, 5]
  - Gradient Metotlar
    - Newton Raphson ,Secant Metodu,Kübik İnterpolasyon Metodu
  - Direkt Kök Metotları
    - İkiye Bölme,Kirişler,Deneme ve İterasyon Metodu [2]
- Çok Boyutlu Kısıtsız Optimizasyon Metotları
  - Arama Metotları
    - Hooke ve Jeeves Metodu,Nelder ve Mead Metodu,Spendly, Hext ve Himswort'un Simpleks Metodu,Kompleks Metodu,Izgara - Ağ Metodu,Döngüsel Koordinat Metodu,Rosenbrock Metodu [1, 5],Genetik Algoritma
  - Gradient Metotlar
    - Davidon - Fletcher - Powell Metodu,En Dik İniş (Çıkış) (Eğim) Metodu,Fletcher - Reeves Metodu,Smith Metodu,Newton Metodu,Birleşik Doğrultuda Hareket Metodu [1, 3, 5]
  - Dinamik Optimizasyon Metotları
    - Minimum Yol Problemi,Dinamik Programlama, Genel Matematiksel Optimizasyon, Optimallik İlkesi,Kesikli Karar Modelleri, Doğrusal Olmayan Sürekli Modeller,Dinamik Programlama ve Fonksiyonların Optimizasyonu Kesikli Maksimum İlkesi [3]
  - Çok Boyutlu Kısıtlı Optimizasyon Metotları
    - Yarı İlmikleme,Gradient Yansıtma Metodu,Ceza ve Engel Fonksiyon Metotları,Ardışık Kısıtsız Optimizasyon Tekniği (SUMT),Frank Wolfe Algoritması [1, 3, 5],Genetik Algoritma
  - Özel Programlama Tipleri
    - Karesel Programlama,Geometrik Programlama,Ayrılabilir Programlama,Tamsayılı Programlama,Tahmini Programlama,Amaç Programlama,Lineer Çarpanlar Metodu [5]

7. OPTİMİZASYON TEKNİKLERİNİN SEÇİM SEBEPLERİ (SELECTED CAUSES OF OPTIMIZATION TECHNIQUES)

Bu çalışmada ele alınan Nelder – Mead ve Frank – Wolfe metotlarını diğer optimizasyon metotları içindeki yerleri ve önemleri açısından ele alındığında denilebilir ki, bunlar genel sınıflandırma içinde kısıtsız, kısıtlı, direkt (doğrudan arama = türevsiz) ve indirekt (türevli = gradient) yöntemlerini temsil ederler.

7.1. Nelder ve Mead Metodu (Nelder and Mead Method)

Nelder ve Mead Metodu Spendly, Hext ve Himsworth'un simpleks metodunun genişletilmiş bir şeklidir[1]. Bu metot adından da anlaşılacağı gibi çok değişkenli bir fonksiyonun optimizasyonunu

bulmak için Nelder ve Mead tarafından tasarlanmış bir simpleks metodudur.
Bu metotta (n + 1) adet nokta, bir düzenli simpleks (basit ve düzenli) olarak bilinen n-boyutlu Öklidyen uzayda karşılıklı olarak konulur. [12].
İki boyutta bu metot üçgenin köşelerinde fonksiyon değerlerini karşılaştıran bir model arama metodudur. İki değişkenli bir $z = f(x,y)$ fonksiyonunun minimizasyon durumunu gözönüne aldığımızda, üçgenin en kötü köşesinde (w = worst vertex) $z = f(x,y)$ fonksiyonunun değeri en büyüktür.
Bu nedenle, bu en kötü köşe yeni bir nokta ile yer değiştirir. Böylece yeni bir üçgen elde etmiş oluruz. Artık arama işlemi bu yeni üçgen içinde devam ettirilir ve böylece bu işlem köşe nokta değerinde fonksiyon değerinin gittikçe küçüldüğü bir üçgenler dizisine dönüşür.
İşlem üçgenlerin küçülerek bir noktaya yaklaşması ile son bulur ki bu nokta istenen minimum noktadır. İki değişkenli $z = f(x,y)$ fonksiyonu için geliştirilen bu metot n-değişkenli $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ fonksiyonuna genelleştirilebilir. Nelder ve Mead'ın geliştirilmiş olduğu bu metot etkili ve hesap açısından kısadır.
Bu metotta simpleksin hareketi üç temel işlem (**Reflection**- Yansıtma, **Expansion**-Büyüme-Genişleme) ve (**Contraction**-Büzülme-Kısalma) ile sağlanır. Şimdi bu işlemleri safhaları ile açıklayalım.

i) Başlangıç Üçgeni BGW: (Initial Best Good Worst Triangle)

Min $z = f(x,y)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bir üçgenin verilen üç köşesi ile işleme başlayalım.

$V_k = (x_k, y_k)$......... .... $k = 1, 2, 3$

Sonra bu üç köşe noktanın herbirinde fonksiyon değerlerini bulalım ve buna $z_k = f(x_k, y_k)$ (k = 1, 2, 3) diyelim. Bu değerleri de büyüklük sırasına göre $z_1 \le z_2 \le z_3$ olacak şekilde sıralayalım. Üçgenin köşe noktalarını;

$B = (x_1, y_1), G = (x_2, y_2), W = (x_3, y_3)$ ile gösterelim.Burada;

B = Best Vertex = En iyi köşe nokta
G = Good Vertex = Sonraki en iyi köşe nokta
W = Worst Vertex = En kötü köşe nokta olarak tanımlanabilir.

B noktası maksimum durumunda fonksiyonda yerine konduğunda en büyük fonksiyon değerine sahip iken aynı nokta minimum durumunda ise en küçük fonksiyon değerine sahiptir.

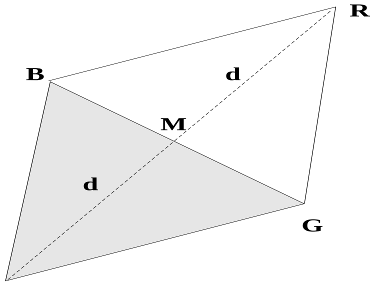
İyi Kenarın Orta Noktası:İyi kenardan maksat üçgenin $B = (x_1, y_1)$ ve $G = (x_2, y_2)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. Bu doğru parçasının orta nokta koordinatları da $B = (x_1, y_1)$ ve $G = (x_2, y_2)$ noktalarının koordinatlarının ortalamaları alınarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$M = \frac{B+G}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

R Noktasını Kullanarak Yansıtma İşlemi:

W noktası ile B noktası arasındaki BGW üçgeninin kenarı boyunca hareket ettiğimizde f(x , y) fonksiyonu gittikçe azalan bir grafik çizer. Benzer olarak W noktasından G noktasına doğru üçgenin bu kenarı boyunca hareket ettiğimizde f(x , y) fonksiyonu yine azalan bir grafik çizer. Bu nedenle B ve G noktalarını birleştiren doğrunun karşı kenarı üzerinde W'ya uzak noktalarda f(x , y) fonksiyonu çok küçük değerler alır. Bunu test etmek için R noktasını BG kenarından geçecek şekilde yansıtarak elde edebiliriz.
R noktasını belirleyebilmek için ilk olarak BG kenarının M noktasını daha önce tanımladığımız gibi tespit ederiz. İkinci olarak W ile M noktalarını birleştirerek bir doğru elde ederiz. Bu doğrunun uzunluğuna d dersek, son olarak M noktasından d uzunluğunda bir doğru

çizeriz ve bu doğrunun bittiği noktaya R deriz. Böylece yansıma işlemini kullanarak R noktasını elde etmiş oluruz (Şekil.1).

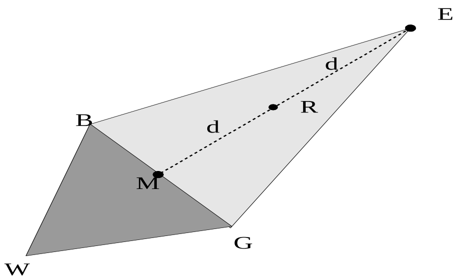


Şekil.1.Yansıma işlemini kullanarak R noktasının bulunması
Figure.1.1.Finding the R point using Reflection Process

Şekilden de görüleceği gibi R noktasının vektörel notasyonu;
R = M + (M - W) = 2M - W şeklindedir.

Genişleme İşlemini Kullanarak E noktasını Elde Etmek:

Eğer R'deki fonksiyon değeri W'deki fonksiyon değerinden daha küçükse yani $f(R) \leq f(W)$ ise minimuma doğru bir yönde hareket ederiz. R noktası minimum noktaya uzak olabilir. Bu nedenle M noktasından R noktasına olan doğruyu R noktasından aynı d uzunluğunda genişlettiğimizde bitim noktası E'yi elde ederiz.
Böylece biz BGW üçgeninden genişleme işlemi ile BGE üçgenini elde ederiz.(Şekil.2)

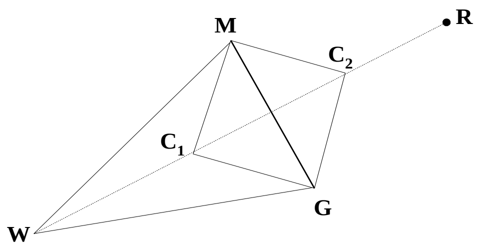


Şekil.2. Genişleme işlemi ile BGE üçgenini elde edilmesi
Figure.2. Obtaining the triangle BGE with the Expansion Process

Eğer E noktasındaki fonksiyon değeri R noktasındaki fonksiyon değerinden daha küçük ise yani f(E) < f(R) ise, R'den daha iyi bir köşe bulmuş oluruz.Genişleme işlemi ile elde ettiğimiz (Şekil.2)'daki E noktasına ait vektör formülasyonu;
E = R + (R - M) = 2R – M'dir.

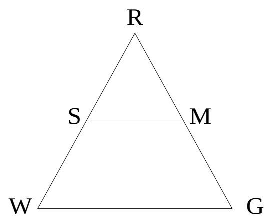
Daraltma (Büzülme) İşlemini Kullanarak C noktasının Elde Edilmesi:

Eğer R noktasındaki fonksiyon değeri W noktasındaki fonksiyon değeri ile aynı ise yani,
f(R) = f(W) ise, başka bir nokta test edilmek zorundadır. Fonksiyon M noktasında küçük olabilir fakat biz M ile W'yi yeniden yazamayız çünkü yeni bir üçgen elde etmek zorundayız. WM ve MR doğrularının orta noktalarına sırasıyla C1 ve C2 dersek yeni üçgenimiz BGC olur. Burada BGC1 veya BGC2 olması iki boyutlu durumunda fark etmez. Fakat çok boyutlu durumda fark eder (Şekil.3).



Şekil.3. C1 ve C2 orta noktaları ile BGE üçgeninin elde edilmesi
Figure.3. Obtaining the triangle BGE with the C1 and C2 midpoints

Üçgenin B noktasına Doğru Daraltılması:
Eğer C noktasındaki fonksiyon değeri W noktasındaki fonksiyon değerinden daha küçük değilse yani $f(C) \leq f(W)$ ise G ve W noktaları B noktasına doğru daraltılmak zorundadır. (Şekil.4) Bu daraltma işlemini ilk adımda G noktası yerine BG doğrusunun orta noktası olan M noktası ve W noktası yerine BW doğrusunun orta noktası olan S noktası alınır. Sonraki ardışık işlem adımları B noktasına doğru hep orta noktalar alınarak devam ettirilir. İşlem B noktası elde edildiğinde son bulur. (Şekil.4)



Şekil.4. B noktasına doğru daraltma işlemi
Figure.4.Contraction Process towards to the B point

Her bir adım için mantıksal kararlar: Yukarıda açıklanan her bir adımda yeni bir köşe bulunur ve bu W ile değiştirilir. Bunu bir algoritma olarak şu şekilde açıklayabiliriz.
$f(R) < f(G)$ ise Safha - 1
$f(R) \leq f(G)$ ise Safha - 2 düzenlenir.
Safha 1: Yansıma veya Genişleme
$f(B) < f(R) \Rightarrow$ W yerine R alınır.
$f(B) \leq f(R) \Rightarrow$ E ve f(E) hesaplanır.
$f(E) < f(B) \Rightarrow$ W yerine E alınır.
$f(E) \leq f(R) \Rightarrow$ W yerine R alınır.
Safha 2: Büzülme veya Daralma
$f(R) < f(W) \Rightarrow$ W yerine R alınır.
Sonra $C = \frac{W+M}{2}$ alınır ve f(C) hesaplanır.
$f(C) < f(W) \Rightarrow$ W yerine C alınır.
$f(C) \leq f(W) \Rightarrow$ S yerine f(S) hesaplanır.
W yerine S ve G yerine M alınır(12).

İki Boyutlu Örnek Problem için Nelder - Mead Metodunun program çıktısı
Değişken Sayısı : 2
İterasyon Sayısı : 15
[1]. Min [2]. Max : 1
Amaç Fonksiyon : x + xy^2 - 3xy
Vektör Elemanlarlan

1. Vektör Elemanları : (0.0000, 0.0000)
2. Vektör Elemanları : (2.0000, 0.0000)
3. Vektör Elemanları : (2.0000, 1.0000)

k	$B(x_k, y_k)$	$G(x_k, y_k)$	$W(x_k, y_k)$	$F(x_k, y_k)$
1	(2.0000,1.0000)	(2.0000,0.5000)	(1.0000,0.5000)	0.00000000000
2	(1.0000,0.5000)	(1.5000,0.5000)	(1.5000,0.7500)	-0.75000000000
3	(1.5000,0.7500)	(1.5000,0.6250)	(1.2500,0.6250)	-0.84375000000
4	(1.2500,0.6250)	(1.5000,0.7500)	(1.1250,0.8125)	-0.87890625000
5	(1.1250,0.8125)	(1.2500,0.6250)	(1.3438,0.7344)	-0.97119140625
6	(1.1250,0.8125)	(1.3438,0.7344)	(1.2188,0.9219)	-0.97119140625
7	(1.1250,0.8125)	(1.2188,0.9219)	(0.8281,1.1328)	-0.97119140625
8	(0.8281,1.1328)	(0.9766,0.9727)	(1.0234,1.0273)	-0.97475528717
9	(0.9766,0.9727)	(1.0234,1.0273)	(0.9141,1.0664)	-0.99809467793
10	(0.9766,0.9727)	(1.0234,1.0273)	(0.9570,1.0332)	-0.99809467793
11	(0.9570,1.0332)	(0.9668,1.0029)	(0.9902,1.0303)	-0.99846400321
12	(0.9902,1.0303)	(0.9668,1.0029)	(1.0215,0.9834)	-0.99928985350
13	(1.0215,0.9834)	(1.0059,1.0068)	(0.9941,0.9932)	-0.99962122552
14	(0.9941,0.9932)	(1.0000,1.0000)	(1.0078,0.9883)	-0.99987939186
15	(1.0000,1.0000)	(1.0039,0.9941)	(0.9971,0.9966)	-1.00000000000

7.2. Frank - Wolfe Metodu(Frank - Wolfe Method)

Kısıtlı fonksiyonları gradient yöntemi ile doğrusal forma sokup doğrusal programlama ile çözümüne hazırlık yapar. Doğrusal olmayan amaç fonksiyonu ve doğrusal kısıtlı problemi gradient yöntemi ile doğrusallaştırma işlemini yürütür. En sık kullanılan karesel programlama için ideal bir yöntemdir.

Bu algoritma bir amaç fonksiyonunun doğrusal kısıtlar altındaki optimizasyonunu inceler.

Amaç optimize f(x)

Kısıtlar $Ax \leq b$

$x \geq 0$

Verilen olurlu çözüm x' iken f(x) amaç fonksiyonu için doğrusal bir yaklaşım f(x) fonksiyonunu $x = x'$ civarında birinci mertebeden Taylor serisine açmakla elde edilir. Buna göre;

$$f(x) \cong f(x') + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x')}{\partial x_j} (x_j - x'_j) \cong f(x') + \nabla f(x')(x - x')$$

$f(x')$ ve $\nabla f(x').x'$ değerleri sabit değerler olduğundan yeni amaç fonksiyonumuz;

$$f(x) = f(x') + \nabla f(x').x - \nabla f(x').x'$$

$f(x) \cong \nabla f(x').x + c$ şeklindedir.

Bu son ifadeyi;

$g(x) = \nabla f(x').x$ yazarsak bu bir doğrusal programlama problemine dönüşür ve optimal çözüm simpleks metot veya grafik çözümden elde edilebilir.

Bu çözüme x_{LP} diyelim. Doğrusal amaç fonksiyonu x'den x_{LP} arasındaki doğru parçası boyunca bir hareket gibi zorunlu olarak muntazaman artar.

Frank -Wolfe algoritmasına ait işlem adımları aşağıdaki gibidir.

Başlangıç Adımı: Bir başlangıç olurlu çözümü bulabilmek için doğrusal programlama işlemi uygulanarak bu aşikar çözüm $x^{(0)}$ bulunur.
k = 1 yazılır.

Ardışık Adımlar:

1.Adım: j = 1, 2, 3, ... , n için $x = x^{(k-1)}$de

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ değerlendirilir ve $c_{j=}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ ifadesi yazılır.

2. Adım: Aşağıdaki doğrusal programlama problemine ait $x_{LP}{}^{(k)}$optimal çözümü bulunur.

Maksimum g(x) = $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Kısıtlar $Ax \leq b, x \geq 0$

3. Adım: $0 \leq t \leq 1$ arasındaki t değişkeni için;

$$x = x^{(k-1)} + t\left[x^{k}{}_{LP} - x^{(k-1)}\right]$$

için h(t) = f(x) ifadesi oluşturulur. Bundan sonra problemimiz $0 \leq t \leq 1$ için h(t) ifadesini maksimize etmeye dönüşür ki bu bir boyutlu arama işlemi ile çok kolay başarılabilir. Buradan bulunan t* değeri (1) ifadesinde yerine konarak yeni aşikar çözüm elde edilir. Daha sonra son adıma geçilir.

Son Adım: Eğer $x^{(k)}$ ile $x^{(k-1)}$arasındaki fark istenilen hassasiyete ulaştığında aranılan optimal çözüm $x^{(k)}$ olarak alınır. Bir başka deyişle k = k + 1 alınarak ardışık adımlara geri dönülür.

Frank - Wolfe Algoritması ile çözülen örneklerin genelinde karşımıza şu önemli sonuç çıkar. Aşikar çözümler iki veya daha fazla yörünge üzerinde değişirler. Bu çözümler yörüngeler üzerinde değiştiğinde, bu yörüngelerin kesiştiği yaklaşık noktanın tahmini optimal çözüm olacağı açıktır. Bu tahmin son aşikar çözümden daha iyidir. Bunun sebebi aşikar çözümlerin optimal çözüme doğru çok yavaş yakınsaması ve bundan dolayı optimal çözümden uzak olmalarıdır. Frank-wolfe algoritmasının nasıl uygulandığı göstermek için aşağıdaki doğrusal kısıtlı optimizasyon problemini göz önüne alalım.

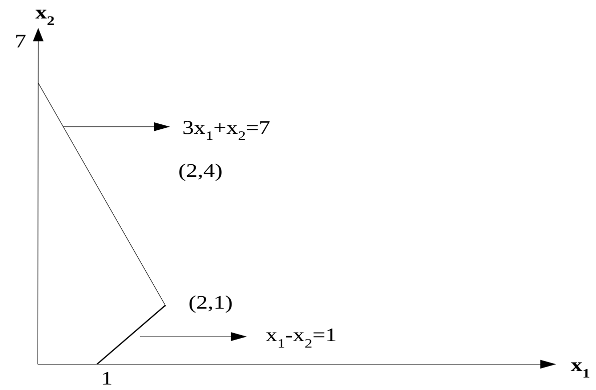
Maksimum f(x)= $32x_1 - x_1^4 + 8x_2 - x_2^2$

Kısıtlar

$3x_1 + x_2 \leq 7$

$x_1 - x_2 \leq 1$ ve $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

Bu problemin doğrusal kısıtlarına göre elde edilen uygun bölge Şekil.5' deki gibidir.



Şekil.5.Problemin uygun bölgesi
Figure.5.Feasible region of the problem.

Kısıtlar göz önüne alınmaksızın kısıtsız $f(x) = 32x_1 - x_1^4 + 8x_2 - x_2^2$ fonksiyonun $\Rightarrow$maksimumu kısmi türevler alınıp sıfıra eşitlenerek $(x_1, x_2) = (2,4)$ olarak kolayca bulunabilir. Fakat kısıtlı maksimumu bir başlangıç aşikar çözüme ihtiyacımız olacaktır. Bu başlangıç aşikar çözümü $(x_1, x_2) = (0,0)$ olarak alalım. Kısmi türevleri alıp bu noktada değerlendirirsek;

$$\frac{df}{dx_1} = 32 - x_1^3 \Rightarrow \frac{df}{dx_1}(0,0) = 32 - 4(0)^3 = 32$$

$$\frac{df}{dx_2} = 8 - 2x_2 \Rightarrow \frac{df}{dx_2}(0,0) = 8 - 2(0) = 8 \quad \text{olarak bulunur.}$$

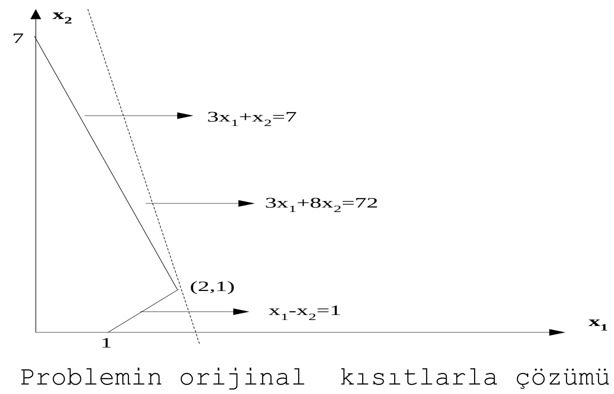
Bu göre yeni amaç fonksiyonumuz bir doğrusal yaklaşım olarak ;

$g(x) = 32x_1 + 8x_2$ dır.Buna göre yeni problemimiz;

$$\text{Max } g(x) = 32x_1 + 8x_2$$

$$\text{Kısıtlar } 3x_1 + x_2 \le 7$$

$x_1 - x_2 \le 1$ ve $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$ olarak tekrar yazılır.Bu problemin orijinal kısıtlarla çözümü $(x_1, x_2) = (2,1)$ noktasını çözüm olarak kabul eder. (Şekil.6)



Şekil.6. Problemin orijinal kısıtlarla çözümü
Figure.6.Solution of problem with the original constraints

Böylece; $g(2,1) = 32(2) + 8(1) = 72$ olur.Bu da (2,1) noktasına yakın olmadığından iyi bir yaklaşım değildir.
Bu nedenle; (0,0) ve (2,1)noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde $f(x)$ 'i en büyük yapan $X = (x_1, x_2)$ noktası yeniden hesaplanır.

f(2,1) = 55 iken g(2,1) = 72 dir. Bu değer (2,1) deki yaklaşımdan iyi bir yaklaşım değildir.(0,0) ve (2,1) noktaları arasındaki doğrunun denklemi;

$(0,0) + t [(2,1) - (0,0)] = (2t,t) \quad (0\leq + \leq 1)$

Buna göre;

$x_1=2t$, $x_2= t$ olarak alınıp f(x)'de yerine yazılırsa t'ye bağlı bir h(t) fonksiyonu elde edilir.

$$f (x_1, x_2)= f (2t, t) = h(t) = 32(2t) - (2t)^4 + 8t + t^2$$

$$h(t) = 72t - t^2 - 164 t^4 \qquad (0\leq t\leq 1)$$

t'ye bağlı h(t) fonksiyonuna bir boyutlu arama işlemi uygulanıyorsa;

$$\frac{df}{dx_1}(2,1) = 32 - 4 (2)^3 = 0$$

$$\frac{df}{dx_2}(2,1) = 8 - 2 (1) = 6$$ ve yeni problemimiz;

$$g(x) = 0. x_1+ 6. x_2$$

Kısıtlar $3x_1+ x_2 \leq 7$

$x_1 - x_2 \leq 1$ iken çözüm $(x_1, x_2) = (0,7)$ dir.

$g(0,7) = 42$, $f(0,7) = 7$

Şimdi (2,1) ve (0,7) noktaları arasındaki doğru bulunur.

$(2,1) + t [(0,7) - (2,1)] = (2-2t , 1+ 6t) \quad (0\leq + \leq 1)$

$h(t) = f(2-2t , 1+6t) = 55 + 36t - 132 t^2 + 64 t^3 - 16t^4$

h(t) ' yi maksimum yapan t değeri;

$t^* = 0.1524$ dür.Buna göre, $(x_1, x_2) =(2-2 t^*, 1+6 t^*) = (1.695,1.914)$ yeni aşikar çözümdür.Yine benzer işlemleri bu son aşikar çözümümüz için uygulayalım.

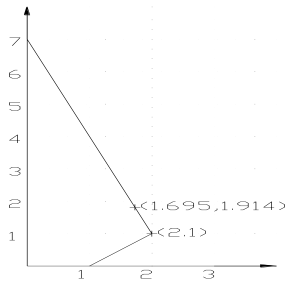
$f(x)= 32 x_1-x_1^4+8x_2-x_2^2$ iken

$$\Rightarrow \frac{df}{dx_1}(1.695,1.914) = 32 - 4(1.695)^3 = 12,52$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx_2}(1.695,1.914) = 8 - 2 (1.914) = 4,17$$ belirlenir ve

yeni amaç fonksiyonumuz;$g(x) = 12.52 x_1 + 4.17 x_2$ olur.

Bu yeni amaç fonksiyonu ile orijinal kısıtlı problemimizi yukarıdaki gibi çözdüğümüzde yeni aşikar çözüm $(x_1 , x_2) = (1.695 , 1.914)$ olarak bulunur.(Şekil.7)



Şekil.7. Problemin yeni aşikar çözümü
Figure.7.New obvious solution of the problem

İki Boyutlu Örnek Problem için Frank - Wolfe Metodunun program çıktısı

Değişken sayısı : 2
Kısıtların sayısı : 2
Max Z= $0.01x_1 + 0x_2$

Kısıtlar
$1x_1 + 3x_2 \leq 8$
$5x_1 + 2x_2 \leq 14$
Frank - Wolfe Algoritması
Başlangıç Aşikar Çözüm: (0.25, 0.25).
$f(x) = 4x_1 + 6x_2 - 1x_1^3 - 2x_2^2$
$df/dx_1 = 4 - 3x_1^2$
$df/dx_2 = 6-4x_2$

k	$x^{(k-1)}$	c_1	c_2	$x_{LP}^{(k)}$	t*	x^k
1	(0.25,0.25)	3.813	5	(2,2)	0.587	(1.277, 1.277)
2	(1.277,1.277)	-0.89	0.892	(0,2.667)	0.122	(1.121, 1.447)
3	(1.121,1.447)	0.229	0.214	(2,2)	0.049	(1.164, 1.474)
4	(1.164,1.474)	-0.07	0.105	(0,2.667)	0.013	(1.149, 1.49)
5	(1.149, 1.49)	0.041	0.042	(2,2)	0.009	(1.156, 1.494)
6	(1.156,1.494)	-0.01	0.024	(0, 2.667)	0.003	(1.153, 1.497)
7	(1.153,1.497)	0.009	0.011	(2,2)	0.003	(1.156, 1.498)
8	(1.156,1.498)	-0.01	0.006	(0, 2.667)	0.001	(1.154, 1.5)
9	(1.154,1.5)	0.004	0	(2.8, 0)	0	(1.155, 1.5)
10	(1.155,1.5)	0.001	0.002	(2,2)	0	(1.155, 1.5)

Sonuç Çözüm: (1.1545, 1.4996).

7. SEÇİLEN TEKNİKLERİN KARŞILAŞTIRMALI GENEL YORUMU (COMPARISON OF SELECTED TECHNIQUES FOR COMMENTS)

Nelder - Mead Medodu çok değişkenli kısıtsız fonksiyonların optimizasyonunu bulan türev kullanmayan (direkt) bir arama işlemidir.Nelder – Mead tarafından geliştirilen metot bir simpleks metodudur ve çok değişkenli kısıtsız fonksiyonların optimizasyonunu bulmakta oldukça etkilidir. İki boyutta simpleks bir üçgen olduğundan, ilk üçgenin üç köşe noktası başlangıç vektörler alınarak işleme başlanır.

Bu köşe noktalarda maksimum problem için en büyük, minimum problem için en küçük fonksiyon değerine sahip noktaya Best Vertex (En iyi köşe nokta), sonraki en iyi noktaya Good Vertex (Sonraki en iyi köşe nokta) ve maksimum problemlerde en küçük, minimum problemlerde en büyük fonksiyon değerine sahip noktaya da Worst Vertex (En kötü köşe nokta) denir. Bu işlem her iterasyonda tekrarlanarak iki boyutlu problemlerde üçgenlerin bir dizisi ile optimum çözüme yaklaşılır. B, G ve W ile isimlendirdiğimiz üçgenin bu köşe noktaları birbirlerine eşit olan nokta aranılan optimum noktadır.

Frank-Wolfe Algoritmasının genel karakteristiği doğrusal kısıtlı , doğrusal amaç fonksiyonu olan bir doğrusal programlama problemine dönüşmesi . diğer önemli bir karakteristiği ise iterasyonların optimum çözüme doğru iki farklı yönden yaklaşmasıdır.

KAYNAKLAR(REFERENCES)

1. Bunday,B.D.,Basic Optimization Methods, Edward Arnold Ltd, London, 1984.
2. Kahaner , D.,Moler, C., Nash, S.,Numerical Methods and Software, Prentice Hall, Inc.Englewood Cliffs, NJ, 1989.
3. Himmelblau,D.M., Edgar,T.F.,Optimization of Chemical Processes, McGraw-Hill,Inc.NY,1989.
4. Kübat,C.,Yöneylem Araştırması,8. Ulusal Kongresi,Ankara,1983.
5. Rao,S.S.,Optimization Theory and Applications, 2nd.Edition, Halsted, Inc. 1978.
6. Kara,İ., Yöneylem Araştırması, Doğrusal Olmayan Modeller , Anadolu Üniversitesi Basımevi, Eskişehir,1986.