ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2011, Volume: 6, Number: 2, Article Number: 1C0418

EDUCATION SCIENCES
Received: November 2010
Accepted: February 2011
Series : 1C
ISSN : 1308-7274

Zuhal Ünan
Mevlüde Doğan
Ondokuz Mayis University
zuhalu@omu.edu.tr
mdogan@omu.edu.tr
Samsun-Turkey

SONLU VE SAYILABİLİR SONSUZ KÜMELER VE SAYILAMAYAN SONSUZ KÜMELERİN BİR MODELLEMESİ

ÖZET

Bu çalışmada, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Eğitimi programında öğrenim gören toplam 25 öğrencinin sonlu küme, sayılabilir ve sayılamayan sonsuz küme kavramlarında mevcut bilgilerinden yola çıkarak yaptıkları hataların matematiksel modelleme yardımıyla belirlenmesi amaçlandı. Bu amaçla öğrencilere küme kavramıyla ilgili bilgilerini hatırlamalarına yardımcı olacak açık uçlu sorular yöneltildi. Sorulara verilen cevaplar değerlendirilerek öğrencilerin düştükleri yanılgılar belirlendi ve bu yanılgıları zihinlerde doğru matematiksel düşünmeyi oluşturacak şekilde etkinlikler yaptırıldı. Etkinlikler sonucunda kavramları daha kolay zihinlerde oluşturdukları görüldü.
Anahtar Kelimeler: Sonlu Küme, Sayılabilir Küme, Sayılamayan Küme, Sonsuz Küme, Matematiksel Modelleme

FINITE SET AND COUNTABLE INFINITE SETS AND UNCOUNTABLE INFINITE SETS MODELLING

ABSTRACT

In this study, Ondokuz Mayis University Secondary School Science and Mathematics Education program, who studied a total of 25 students of finite sets, countable and uncountable infinite sets concepts available in the information by setting out from their mistakes mathematical modelling with the aid was to determine. Students with information about the cluster concept for this purpose will help them remember their open-ended questions were posed. Answers to questions identified by evaluating students' errors and misconceptions of their dreams in the mind to form correct mathematical thinking has been done in the event. As a result of events in mind, they created the concept more easily seen.
Keywords: Finite Set, Countable Sets, Uncountable Sets, Infinite Sets, Mathematical Modelling

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Sayılar ve sayılar arasındaki ilişkiler matematik tarihi sürecinde bilim adamlarını meşgul etmiş olup, sayının açık ve yeterli bir tanımını vermek antik Yunan'dan günümüze değin düşünürleri uğraştıran bir konu olmuştur [24]. Sayı sistemlerindeki dizilimin nerede son bulacağı belli değildir. Sonsuzluk Zeno'dan beri tartışılan, çözüm bekleyen bir sorundu. Euclid Geometrisinin aksiyomlarından biri, "bütünün herhangi bir parçasından büyük olduğu savını" dile getirir. Oysa, bu yargının, sonsuzlar söz konusu olduğunda, doğru olmadığı görülmüştür [24]. Cantor, sonsuz bir dizi ya da kümeyi, "kardinal sayısı herhangi bir alt bölümünün kardinal sayısına denk olan küme" diye tanımlar. Başka bir deyişle, sonsuz bir kümedeki elemanlar ile, o kümenin bir alt bölümüne ait elemanlar bire-bir eşleştirilebilir [24]. Bu düşüncelerden hareketle, öğrencilerde sayılabilir ve sayılamayan küme kavramı doğadan, günlük yaşamlarından ve matematiksel gerçeklerden yola çıkarak kavratılmaya çalışılmıştır.

Modern matematiğin en önemli kullanım araçlarından birisi kümeler teorisidir. Kümeler teorisi çalışmaları matematiğin temelinde kullanılışı 20. yüzyılın başlangıcında Frege, Russel ve diğerleri tarafından başlamıştır ve matematiğin yalnız başına kümeler teorisi üzerine kurulabileceği ortaya çıkmıştır.

Boş küme ya da sonlu bir dizinin değer kümesi olan kümeye sonlu küme denir. Boş küme ya da bir dizinin değer kümesi olan kümeye sayılabilir (numaralanabilir) küme denir [15]. Hemen görülebileceği gibi sayılabilir bir kümenin bir fonksiyon altındaki görüntüsü de sayılabilirdir, yani sayılabilir tanım kümesine sahip her fonksiyonun değer kümesi sayılabilirdir ve benzer bir durum sonlu kümeler için de vardır. Biraz farklı fakat denk bir tanım olan birebir eşleme kavramına dayalı tanımı vermek matematikte yaygın olarak yapılır. Önce sonlu bir küme ile birebir eşleme yapılabilen her kümenin sonlu olması gerektiğine ve sayılabilir bir küme ile birebir eşleme yapılabilen her kümenin de sayılabilir olması gerektiğine dikkat ediyoruz. Doğal sayılar kümesi sayılabilir fakat sonlu olmadığından doğal sayılar kümesi ile birebir eşleme yapılabilen her küme sayılabilir sonsuzdur [15].

Sonsuzluk kavramının öğrenilmesinde literatür çok geniş olmasına rağmen [4 ve 5] çoğu çalışmalar sonsuz kümelerin karşılaştırılması [19, 21 ve 22], sonsuzluk kavramlarının çelişkili yapısıyla [7, 12 ve 20] ve sonsuz kümelerin kavramsallaştırılmasında karşılaşılan tarihi/epistomolojik engellerle [10] ilgilenir.

Matematik öğretiminde temel sayı kümeleri kabul edilen (0,1) açık aralığı doğal sayılar, tamsayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve reel sayılar ile özelliklerine ayrıntılı olarak yer verilmektedir. Ayrıca sonluluk ve sonsuzluk kavramları da detaylı bir şekilde incelenmektedir. Bu tip kavramlar, öğretmen adaylarının 20.yy Matematiğini anlamalarına, özümsemelerine ve yorumlamalarına temel oluşturmaktadır. Bu araştırmanın amacı, ortaöğretim matematik öğretiminde okuyan öğrencilerin sonlu küme, sayılabilir sonsuz küme ve sayılamayan sonsuz küme kavramlarını ne düzeyde anladıkları, nasıl algıladıkları ve bu kavramlardaki yanılgılarını ortaya koyarak gerçekleştirilen modelleme etkinlikleri ile bu kavramlardaki var olan durumun nasıl değiştiğini gözlemlemektir.

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Öğrenim hayatımız boyunca sonsuzluk kavramı matematik eğitiminde ya problemin verileni olarak doğrudan alınmış ve üzerinde işlemler yapılmış ya da cebirsel işlemlerden yola çıkarak sonuçta sonsuzluğa ulaşılmıştır. Bazen de bir postülat ya da aksiyomun veya matematiksel bir düşüncenin içine gizlenmiş ve bununla birlikte çözüme ulaşılmıştır. Matematiksel gösterim olarak kümelerde bize "…" sonsuzluğu anlatırken aritmetik işlemlerde "∞" anlatılmak istenen duygunun yerini almıştır. Ortaöğretim matematik programı incelendiğinde kümeler kuramına önemli ölçüde yer verildiği görülmektedir. Dolayısıyla ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğretmen adaylarının bir kümenin sonsuz elemanlı olmasının ne anlama geldiğini özümsemiş olması gerekir. Bu nedenle kümelerin sonsuzluğu, üzerinde araştırma yapılması gereken konulardan biridir. Bu konuda literatür taraması yapıldığında Türkiye'de modelleme üzerine bir çalışmanın bulunmadığı görülmüştür. Yapılan çalışma ile öğretmen adaylarının sonsuzluğu zihinde tasarlamalarına yardımcı olacak etkinlikler sunulmuş ve kümelere faklı bakabilme becerisi kazandırılmaya çalışılmıştır.

3.DENEYSEL YÖNTEM (EXPERIMENTAL METHOD)

- **Araştırma Modeli:** Literatür incelendiğinde araştırılan konuları derinlemesine incelemek için özel durum çalışması (örnek olay yöntemi) yönteminin kullanılması önerilmektedir. Bu yöntem, araştırmada nitel ve nicel tekniklerin beraber kullanılmasına olanak tanımaktadır. Ayrıca bu yöntemin veri toplama sürecinde bütün metodların kullanımına pozitif bakmaktadır [3]. Gall, Borg ve Gall (1996) araştırmalarda durum çalışmalarının bir olayı meydana getiren ayrıntıları tanımlamak ve görmek, bir olaya ilişkin olası açıklamaları geliştirmek, bir olayı değerlendirmek amacıyla yapıldığını belirtmektedir [1].
- **Çalışma Grubu:** Bu çalışma, 2008-2009 eğitim-öğretim yılı güz/bahar yarıyılında Eğitim fakültesi Orta Öğretim Matematik öğretmenliğinde bölümünde 4. Sınıfta öğrenim görmekte olan seçilen 25 öğrenci ile yürütülmüştür.
- **Verilerin Toplanması ve Analizi:** Araştırmanın başında öğrencilerin sonlu küme, sayılabilir küme, sayılamayan küme ve sonsuz küme kavramlarına ilişkin durumlarını tespit amacıyla 3 tane açık uçlu soru öğrencilere yöneltilmiştir. Öğrencilerin cevap kâğıtları incelenerek doküman analizi yapılmıştır. Bu cevaplar incelenerek öğrencilerin cevapları sınıflandırılmış, aynı zamanda frekans ve yüzdelik dilimlere yer verilmiştir. Daha sonra öğrenciler ile beraber iki tane modelleme etkinliği yapılarak bu süreç sonunda öğrencilere açık uçlu sorular yöneltilerek cevapların analizi yapılmıştır.

Araştırmaya katılan öğrencilerden "küme nedir?" sorusuna yönelik ne anladıklarını yazılı olarak detaylı açıklamaları istenmiştir. Bunun paralelinde öğrencilere bir kümenin eleman sayısı hakkındaki düşünceleri yine yazılı olarak sorulmuş ve örneklendirme yaparak gerekçelerini detaylı açıklamaları istenmiştir. Devamında kendilerine doğal sayılar kümesi, tamsayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesi, reel sayılar kümesi,… gibi matematik derslerinde kullandıkları kümeler verilerek eleman sayılarına göre sınıflandırmaları istenmiştir. Ayrıca detaylı açıklamaları yazılı olarak alınmıştır. Elde edilen veriler doğrultusunda öğrencilerin öğrenim süresi boyunca matematiksel kavramları kümeler üzerine oturtarak işlem yapmalarına rağmen eleman sayıları bakımından kümeleri tanımadıkları tespit edilmiştir. Eleman sayıları bakımından öğrencilere zihinlerinde kavram oluşturmalarına yardımcı olması amacıyla iki matematiksel model sunulmuş ve öğrenci üzerindeki etkileri değerlendirilmiştir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA (FINDINGS AND DISCUSSIONS)

Küme kavramı ilk kez 19. yy da George Cantor tarafından ortaya atılmıştır. Zaman içinde çoğu öğrencinin kümenin bu biçimsel tanımıyla

çelişen, nesneler topluluğundan oluşan sezgisel küme tanımı geliştirdiği görülmüştür [6]. Küme iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur. Verilen bir nesnenin bu topluluğa ait olup olmadığı konusunda herkes hemfikir olmalıdır [17]. Küme kavramı, kitaplarda "iyi tanımlanmış nesneler topluluğuna küme denir." şeklinde tanımlanmaktadır. "İyi tanımlanmış ifadesi ile anlatılmak istenen şey nedir?" sorusu çoğu öğrencide bir anlam taşımamaktadır. Kümenin elemanlarını sonlu olarak alınması kapalı bir bölgede tanımlanması biçiminde yorumlanmaktadır [15]. Bu düşünce ise, bir kümenin elemanlarının sonlu sayıda olması gibi bir zorunluluğun olmaması ile çelişir. Örneğin belli bir doğruyu oluşturan noktalar kümesi sonsuz sayıda elemana sahiptir. Küme kavramının öğrencide bıraktığı iz esas alınarak bunun üzerinden irdeleme yapılarak kıyaslama yoluna gidilmiş, öğrencinin de kendi bilgisini sınama fırsatı verilmiştir.
Bu incelemeler sonucunda elde edilen bulgular ve ilgili düşünceler şöyle özetlenebilir:

İlk olarak öğrencilere öğrenim yaşamları boyunca en çok karşılaştıkları kümenin tanımı sorulmuştur. Elde edilen bulgular aşağıda verilmiştir.
Kümenin tanımına ait değerlendirme:

- Öğrencilerin %62 si küme tanımını "belli bir özellik göz önüne alınarak oluşturulan topluluk" olarak tanımlamıştır. İyi tanımlılıkla anlatılmak istenen şeyin ortak özellik taşıyor olması biçiminde ifade etmişlerdir.
- Öğrencilerin %31 i küme tanımını "belli özelliklere göre ya da herhangi bir özellik olmadan gruplandırılmış nesneler topluluğu" biçiminde tanımlamıştır. İyi tanımlılıkla anlatılmak istenen şeyi ise genelde "bir kümenin liste yöntemi, Venn şeması ve ortak özellik yöntemi ile gösterilmesi" şeklinde açıklamışlardır.
- Öğrencilerin %7 si ise örnek üzerinden kümeyi tanımlamaya çalışmıştır. Genel bir tanım verememişlerdir.

İkinci olarak öğrencilere eleman sayısı bakımından kümeleri kaç gruba ayırabileceğimiz sorulmuştur.
Kümenin eleman sayısına ait değerlendirme:

- Öğrencilerin %43 ü boş küme, alt küme, evrensel küme, ayrık küme, denk küme, eşit küme, tek nokta kümesi, açık küme, kapalı küme, üst küme gibi kümeye ait alt kavramları yazmışlardır. Kümenin eleman sayısını bu kümelerin belirttiğini ifade etmişlerdir.
- Öğrencilerin %37 si ise boş küme, sonlu küme ve sonsuz küme şeklinde ifade etmişlerdir.
- Öğrencilerin %20 si ise kümenin yazılım şekline göre gruplandırıldığını ifade etmiştir. Daha açık ifade ile Venn şeması, liste yöntemi ve ortak özellik yöntemi eleman sayısına göre seçildiğini ifade etmişlerdir.

Üçüncü olarak, öğrencilere liste yapma metoduna göre, IN doğal sayılar kümesi, Z tamsayılar kümesi, Q rasyonel sayılar kümesi, IR reel sayılar kümesi, (0,1) açık aralığı verilerek eleman sayılarına göre sınıflandırmaları istenmiştir.
Sayı kümelerinin eleman sayısına göre değerlendirme:

- Öğrencilerin %20 si, verilen kümeleri eleman sayılarına göre IN ve Z kümelerini sayılabilir sonsuz elemanlı küme olarak ifade ederken Q,IR ve (0,1) kümelerini sayılamayan sonsuz elemanlı küme olarak açıklamışlardır.
- Öğrencilerin %40 ı kümelerin eleman sayıları hakkında bir yorum getirememiştir.

- Öğrencilerin %17 si sonsuz elemanlı küme ile sayılabilir sonsuz elemanlı kümeyi bilmediklerini ifade etmişlerdir.
- Öğrencilerin %23 ü kümelerin birbiri ile ilişkisi üzerinde durmuş ve hepsini sonsuz elemanlı küme almıştır.

Yazılı dokümanlar ayrıntılı incelendiğinde, öğrencilerin küme kavramına yönelik birçok kavram yanılgısının (ne gibi açık olarak ifade ediniz) olduğu dikkati çekmektedir. Biz çalışmamızda sonlu ve sayılabilir sonsuz elemanlı küme ile sayılamayan sonsuz elemanlı kümeleri sınıflandırabilme becerileri ile ilgileneceğiz. Yazılı dokümanlardan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu sonsuz kavramının sayılabilir ve sayılamayan oluşunun anlamsızlığını dile getirmiştir. Ayrıca sonlu ve sayılabilir sonsuz elemanlı küme ile sayılamayan sonsuz elemanlı kümenin ne anlama geldiğini anlamadıkları görülmüştür. Bunun için aşağıdaki iki matematiksel model etkinlik olarak öğrenciye sunulmuştur:

- **1. Etkinlik:** İlk etkinlik olarak bir insanın ömrü ortalama 70 yıl alınmış ve zamana bağlı olarak mercimek taneleri ile eşleştirilmiştir. Zamanda sınırlamaya gidildikçe mercimek tanesi artmak zorunda kalmıştır. Zaman dilimi küçüldükçe sayma tanımı gereğince sonlu bir küme sayılamayan sonsuz elemanlı bir kümeye dönüşmüştür. Böylece zamana bağlı birçok küme oluşturulmuştur. Aşağıda söz konusu kümeler ifade edilmiştir:

Tablo 1. Zamana bağlı olarak kümenin eleman sayılarının oluşturulması
(Tablo 1. Determination of the number of element of the set depending on time)

Adım Sayısı	Uygulama ve matematiksel modeli
	Bir insanın ömrünün ortalama 70 yıl olduğunu düşünelim ve insan ömrünü mercimek tanesi ile eşleyerek saymak isteyelim.
I. Adım	İnsan ömrünün her bir yılını bir mercimek tanesi ile eşleyelim. Böylece her bir yılı temsil eden 70 mercimek tanesi elde etmiş oluruz. Elimizde oluşan kümeye A kümesi dersek, 70 elemanlı bir küme elde edilmiş olur.
II. Adım	İkinci aşamada insan ömrünün her bir gününü bir mercimek tanesi ile eşleyelim. Böylece her bir günü temsil eden 365x70 mercimek tanesi ile ömrümüzü eşlemiş oluruz. Bu şekilde elde edilen kümeye B kümesi diyelim
III. Adım	Üçüncü aşamada insan ömrünün her bir saatini bir mercimek tanesi ile eşleyelim. Böylece her bir saati temsil eden 24x365x70 mercimek tanesi ile ömrümüzü eşlemiş oluruz. Bu şekilde elde edilen kümeye C kümesi diyelim.
IV. Adım	Dördüncü aşamada insan ömrünün her bir dakikasını bir mercimek tanesi ile eşleyelim. Böylece her bir dakikayı temsil eden 60x24x365x70 mercimek tanesi ile ömrümüzü eşlemiş oluruz. Bu şekilde elde edilen kümeye D kümesi diyelim.
V. Adım	Beşinci aşamada insan ömrünün her bir saniyesini bir mercimek tanesi ile eşleyelim. Böylece her bir saniyeyi temsil eden 60x60x24x365x70 mercimek tanesi ile ömrümüzü eşlemiş oluruz. Bu şekilde elde edilen kümeye E kümesi diyelim.
VI. Adım	Altıncı aşamada insan ömrünün her bir saniyenin atmış da biri olan bir saliseyi bir mercimek tanesi ile eşleyelim. Böylece her bir saniyeyi temsil eden 60x60x60x24x365x70 mercimek tanesi ile ömrümüzü eşlemiş oluruz. Bu şekilde elde edilen kümeye F kümesi diyelim.
VII. Adım	Bu şekilde devam edilerek G, H, …kümeleri oluşturulabilir.

Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının tamamı oluşturulan A,B,C,… kümelerinin aslında aynı şeyi ifade ettiğini vurgulamışlardır. Gerçek yaşam modeli olarak ele alındığında kümeler seçilen birime bağlı olarak insan ömrünü tanımlamasına karşılık F ve devamındaki kümeleri sayamayız. Ancak hipotezle birlikte matematiksel bir kurala dayandırıldığında oluşturulan kümelerden F ve devamındaki kümeleri sayma yöntemine göre sayabiliriz. Bu durum öğretmen adaylarının saymanın tanımı konusunda bir karam yanılgısı yaşadıklarını göstermektedir. Bu nedenle, verilen etkinlik seçimi beraberinde bir kavram yanılgısı getirmiştir. Bu durum ise etkinlik seçiminin ne kadar hassas bir konu olduğunu gösteriyor. Bir sonraki aşamada öğrencilere eşleme yoluyla saymanın tanımı hatırlatılmış ve zamana bağlı olarak elde edilen kümelerin hangilerinin elemanlarının sayılıp sayılamayacağı sorulmuştur. Öğrenci zamanı ve eşleme yoluyla sayma yöntemini göz ardı ederek hepsinin sayılabileceğini ifade etmiştir. Bunun karşılığı olarak ilkel sayma yöntemine başvurulmuş ve ipe düğüm atarak araştırmaya katılan öğretmen adayları ile birlikte kümenin elemanları aşağıdaki gibi eşleme yoluyla sayılmıştır:

Tablo 2. Kümenin eleman sayılarının eşleme yoluyla sayılması
(Tablo 2. The counting of the number of elements of the set by correspondence)

Oluşturulan kümeler	Eleman sayısı hakkındaki yorum
A kümesi	Bir ipe her yıl için bir düğüm atılabilir. Dolayısıyla A kümesi 70 elemanlı küme olup, elemanlarını sayabiliriz.
B kümesi	Bir ipe her gün bir düğüm atabiliriz. Böylece B kümesi 365x70 elemanlı küme olup, elemanlarını sayabiliriz.
C kümesi	Bir ipe her saat başında bir düğüm atabiliriz. Böylece C kümesi 24x365x70 elemanlı bir küme olup, elemanlarını sayabiliriz.
D kümesi	Bir ipe her bir dakikada bir düğüm atabiliriz. Böylece D kümesi 60x24x365x70 elemanlı bir küme olup, elemanlarını sayabiliriz.
E kümesi	Bir ipe her bir saniyede bir düğüm atabiliriz. Böylece E kümesi 60x60x24x365x70 elemanlı bir küme olup, elemanlarını sayabiliriz.
F kümesi	Bir ipe saniyenin 60 da biri olan her bir salisede bir düğüm atmak isteyelim. Bir saniye içinde 60 düğüm atabilmek için ne el becerimiz o denli gelişmiş ne de zihinden bir saniye içinde 60 kez sayabiliriz. Yani saymanın tanımı gereğince zamana bağımlı kılındığında sayılamayan kümeye dönüşür. Oysa zamanı ortadan kaldırdığımızda 60x60x60x24x365x70 elemanlı küme elde ederiz. Yani sonlu elemanlı bir küme olup, yine elemanlarını sayabiliriz.
Oluşturulabilecek diğer kümeler	F kümesi için yapılan açıklamalar bu kümeler içinde geçerlidir.

Uygulamaya katılan öğretmen adaylarına bu şekilde oluşturulan A,B,C,D,… kümelerinin eleman sayıları hakkındaki düşünceleri ve aralarındaki ilişki sorulmuştur. Her bir öğretmen adayı bütün kümelerin zamana bağımlı olarak aynı şeyi tanımladığını ifade etmiştir. Eleman sayılarını ise zamanın belirlediğini özellikle vurgulamışlardır. Buna göre öğrencilerden söz konusu kümeleri sonlu elemanlı küme, sayılabilir sonsuz elemanlı küme ve sayılamayan sonsuz elemanlı küme olarak üç grupta sınıflandırmaları istenmiştir. Öğrencilerin yanıtları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3. Kümelerin sınıflandırılmasına yönelik öğrenci görüşlerine ait bulgular
(Tablo 3. Findings of students' toughts about the classification of the sets)

	Sonlu elemanlı küme	Sayılabilir sonsuz elemanlı küme	Sayılamayan sonsuz elemanlı küme	Yüzdelik Dilimleri (%)
I. Grup	A,B,C,D,E	--	F	%16
II. Grup	A,B	C,D,E	F	%9
III. Grup	A	B,C,D,E	F	%28
IV. Grup	A,B,C	D,E	F	%13
V.Grup	A,B,C,D,E	F	--	%32
VI. Grup	A,B,C,D,E,F	--	--	%2

Tablo 3 incelendiğinde ilk dört grubu, örnekleme katılan adayların %66'i oluşturmaktadır. Elde edilen bu bulgular örnekleme katılan adaylarla tablo üzerinden tekrar tartışılarak aşağıdaki dönütler alınmıştır.

- Sonlu ve sayılabilir sonsuz elemanlı küme göreceli bir kavramdır. Sayma becerisi ve sabra göre kişiden kişiye değişebilir.
- Aslında sonlu bir küme sayılabilir ve sayılamayan sonsuz elemanlı bir küme olarak düşünüldü. Sonsuzluğu ona zaman kazandırdı.
- Sonsuz diye bir kavram olmadığını gözlemledim.
- Mercimek tanesi ile ömrümün eşleştirilmesine çok şaşırmadım. Ancak her güne bir mercimek eşlemesi yapıldığında ve sadece 2 paket kadar ömrümün olduğunu düşündüğümde çok şaşırdım. İlk aklıma gelen soru "acaba ne kadarını kullandım?" demek oldu. İlerleyen kümelerde paketlerin sayısı arttıkça itiraf etmeliyim ki bende rahatladım.

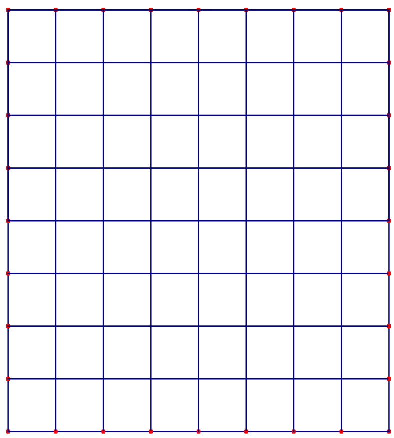
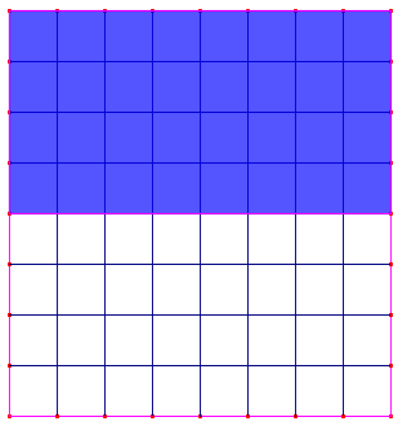
Dönütler esas alınarak tablo üzerinden ilgili kümeler eleman sayıları bakımından öğretmen adayları ile birlikte uygun bir sınıfa yerleştirilmeye çalışılmıştır. Katılımcılara bu aşamada 'biz hangi kümeye sonlu, hangi kümeye sayılabilir sonsuz, hangi kümeye sayılamayan sonsuz elemanlı küme diyeceğiz?' sorusu yöneltilmiştir. Tartışma sonucunda F kümesi herkes tarafından sayılamayan sonsuz elemanlı küme olarak kabul edilmiştir. Buna rağmen sonlu ve sayılabilir sonsuz elemanlı kümeye dağılım yaparken bir uzlaşmaya varılamamıştır. Bizler tarafından bu tartışmaya karşılık olarak kendilerine aşağıdaki öneri getirilmiştir.

Bu üç kümeyi 'sonlu, sayılabilir sonsuz ve sayılamayan sonsuz elemanlı küme' biçiminde üç ayrı kavramın dizilişi şeklinde değil 'Sonlu ve sayılabilir sonsuz elemanlı küme ile sayılamayan sonsuz elemanlı küme' biçiminde iki farklı kavramın dizilişi şeklinde ifade edilebilmesi halinde ilk ikisi bir grup diğeri ise kendi başına bir grup oluşturacağı tercihlerine sunulmuştur. Gerekçe olarak kendilerinin de ifade ettiği gibi kümenin elemanlarını birer birer saymak sabır gerektirir. Kimi örneğin 365x70 tane elemanı sayma zahmetine katlanırken bir başkası için yorucu olabilir. Dolayısı ile birisi için sonlu olan bir küme diğeri için sayılabilir sonsuz küme tanımlayabilir. Yapılan açıklama doğrultusunda katılımcıların tamamı öneriyi benimsemiştir. Böylece dil ile matematik arasındaki ilişkinin önemi ön plana çıkmıştır.

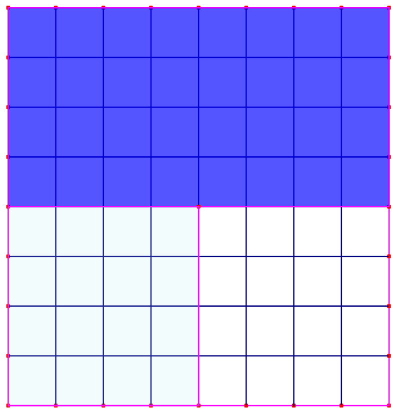
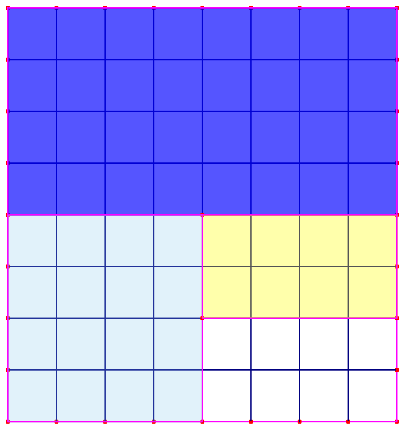
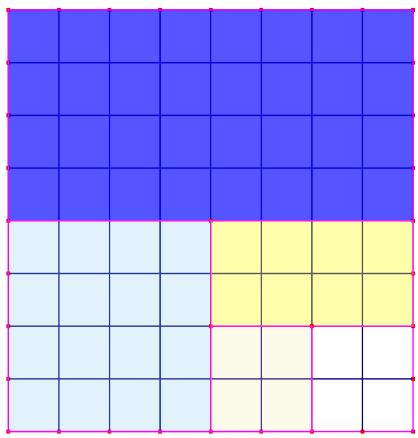
Son olarak katılımcılardan, sayılabilir sonsuz ve sayılamayan sonsuz elemanlı kümeye örnek modeller oluşturmaları istenmiştir. Katılımcıların %72 si gerçek yaşamdan örneklerle modelleme yoluna gitmiş ve kümeleri elemanları bakımından sınıflandırmıştır. Ancak %28 i istenilen başarıyı gösterememiştir. Bunun sebebi ise sınırlı bir yapıda sonsuz bir kavram oluşturabilme düşüncesinin algılanamayışı olmuştur. Bunun için de aşağıda sunulan etkinlik gerçekleştirilmiştir.

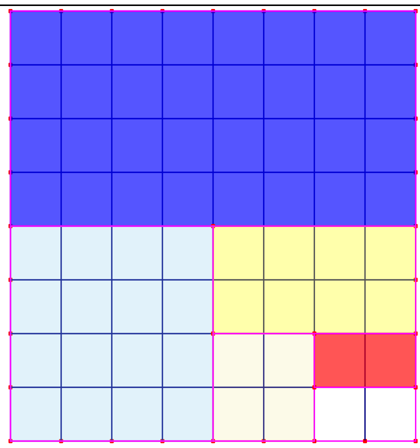
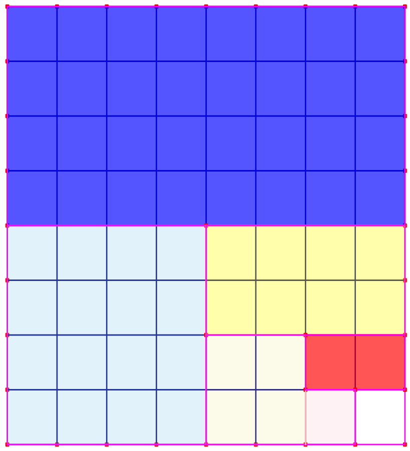
- **2. Etkinlik:** Uygulamaya katılan öğretmen adaylarından birer kare kağıt istenmiştir. Kare kağıt katlanarak 64 birim kareye bölünmüştür. Birimler esas alınarak 1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+… toplamının sonucunu bulmaları istenmiştir. Bunun için aşağıdaki aşamalar gerçekleştirilmiştir:

Tablo 4. Sonsuzluk kavramının oluşturulmasına yönelik matematiksel model etkinliği
(Tablo 4. The mathematical modelling activity about forming the concep of infinitive)

Uygulama Sırası	İşlem	Matematiksel Model
I. Aşama	Alınan kare kağıt 64 birim kareye ayrılmıştır.	
II. Aşama	Bir bütünün ½ lik kısmını tarayalım.	

Tablo 4'ün devamı

III. Aşama	Bütünün ¼ lük kısmını ya da kalan parçanın ½ lik kısmını tarayalım.	
IV. Aşama	Bütünün 1/8 lik kısmı ya da kalan kısmın ½ lik parçasını tarayalım.	
V. Aşama	Bütünün 1/16 lık kısmı ya da kalan kısmın ½ lik parçası tarayalım.	

Tablo 4'ün devamı		
VI. Aşama	Bütünün 1/32 lik kısmı ya da kalan kısmın ½ lik parçası tarayalım.	
VII. Aşama	Bütünün 1/64 lük kısmı ya da kalan kısmın ½ lik parçasını tarayalım.	

Tablo 4 incelenirse taranmayan bir birimlik bir alan kalmıştır. Tablo üzerinden öğrencilere ilk olarak geriye kalan bir birimlik alana aynı işlemin uygulanıp uygulanamayacağı sorulmuştur. Öğrencilerin %24'ü "uygulayamayız" yanıtını vermiştir. Gerekçe olarak birim olduğu için parçalanamaz yanıtını vermişlerdir.

İkinci olarak "Bir birimlik alana aynı işlemi uygulamadan işlemin sonucunu söyleyebilir misiniz?" sorusu yöneltilmiştir. Adayların %20 si bu soruya doğru yanıt verememiştir. Gerekçeleri ise "bu işlemi ne kadar uygularsak uygulayalım kullanılmayan bir alan kalacaktır", olmuştur.

Üçüncü olarak "1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+… toplamı geometrik olarak neyi temsil etmektedir?" sorusu yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının %16 sı kararsız kalırken %73 ü en başta alınan bir birimlik karenin alanını temsil ettiğini söylemiştir. %11 i ise en başta alınan karenin alanından bir birimi çıkararak taralı olan alanı temsil ettiğini söylemiştir.

Dördüncü olarak "1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,… bir kümenin elemanları olarak kabul edilirse elde edilen küme elemanları bakımından hangi sınıfa aittir?" şeklinde bir soru yöneltilmiştir. Adaylar, birinci etkinlikten hareketle, kümenin elemanlarını taralı alanlarla birebir eşlemiş ve

%10u sonlu,

%25i sayılamayan sonsuz,

%65i ise sayılabilir sonsuz elemanlı küme

cevabını vermiştir. Yapılan birebir sorgulamada araştırmacılardan ancak %60ının bilinçli yanıt verdiği gözlenmiştir. Diğer %40lık dilimi ise seriyi daha önce analiz derslerinden tanıdıkları için bilinçsiz yanıt vermiştir.

Beşinci olarak öğrencilere birinci etkinlikteki sonsuz kavramı ile ikinci etkinlikteki sonsuz kavramı arasındaki ilişki sorulmuştur. Genel olarak sonsuz elemanlı küme denildiğinde aslında canım isterse sayarım anlamı taşırken ikinci etkinlikte canım istese de sayamam. Sadece sayılabileceğini düşünürüm yanıtını vermişlerdir. Sezgisel olarak yaklaşabilmişler, ancak matematiksel dille ifade edememişlerdir.

Öğrencilerden bir ay sonra görüş alınarak kümenin eleman sayıları hakkındaki görüşleri tartışılmıştır. Tartışma sonucunda özetle aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

- Sonsuz küme sonlu bir kümenin ayrıntılarına inilmesiyle elde edilebilir. Bu durumda biz sonsuz bir kümeden sonlu bir kümeye ya da sonlu bir kümeden sonsuz bir kümeye ulaşabiliriz.
- İnsan zihninin yetersiz kaldığı durumlarda yani problemin çözülemememsi durumunda sonsuz kavramını sorunlarını çözmek için ortaya atmış olabilir. Tarihte, Sonsuzluk kavramı da değişkenlik göstermiş olabilir. Yıllar öncesine ait sonsuz bir küme günümüzde bilgisayar aracılığı ile sonlu bir kümeye dönüşmüş olacaktır.
- Matematikte kullanılan IR,Z,C,Q IN kümelerinin sonsuzluğu aslında bu kümelerin evrenselliğinden kaynaklanıyor olabilir. Her geçen yılda biraz daha büyük sayılara ihtiyaç duyuyoruz. Dolayısı ile herkes istediği kadar elemanı bu kümelere yazabiliyor. İsmi hiç değişmiyor. Daima sonsuz elemanlı olarak kalıyor.
- Hayatımızda da şöyle bir baktığımızda ayrıntılara indikçe işimiz zorlaştıkça sonsuz kavramını kullanırız. Kaç yaşındasınız? Sorusunun cevabı basittir. Ama hayatınız boyunca kaç nefes aldınız sorusunun cevabı hayli karmaşıktır. Büyük ihtimalle bu soruya verilecek cevap sonsuzdur. Sonsuz küme üzerinde hesap yapmadan sonucu yazılamayan elemanların kümesi gibi algılayabiliriz.
- İnsan olarak hiçbir duyu organımızla algılayamadığımız ama var olduğunu sezinlediğimiz her şeydir.
- Matematikte sonsuzluk pek çok yerde karşımıza çıkar. Hepsinin de ortak özelliği belirsizliğe karşılık gelmesi diyebilirim.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER (CONCLUSIONS AND COMMENDATION)

- Birebir eşleme yoluyla sayma yapılırken şayet sayma işlemi parametreye bağlanırsa, kümelerin çeşitliliğinin ortaya çıktığı gözlenmiştir. Yine sayılabilen birçokluk istenilirse sayılamayan birçokluğa dönüştürülebileceğini gözlemleme fırsatı bulmuşlardır.
- Sınırlı bir yapı içinde sonsuz bir düşünce yaratmanın matematiksel uygulamalara sağlayabileceği yararlar tartışılarak benimsemeleri sağlanmıştır.
- İkinci etkinlikte Bolzano- Weierstrass'ın parçalama yöntemi ile kümenin türünü belirleme yoluna gidilmiştir.
- Dil ile matematik arasında bir ilişki kuramamışlardır. Sayılabilir sözcüğünü matematiğe ait yeni bir kavram olarak algıladıklarını ifade etmişlerdir. Etkinlikler tamamlandıktan sonra, saymak kelimesinden türetilmiş olduğunu ve keyfiyetlik içinde saymanın tanımını doğrulaması gerektiğini ifade etmişlerdir.

- Bu kümelerden hangisinin soyut hangisinin somut küme oluşturduğu araştırmaları istenmiştir. Başlangıçta soyut küme, somut küme arasındaki farkı belirleyememişlerdir. Yönlendirme ile bu kümeleri tanımlayabilmişlerdir.
- Öğrencilere bir soru olarak da Lagrange'in , "Tanrı Matematiği o kadar çok seviyor ki; hatalar hataları götürmüş geriye yalnızca doğrular kalmış", sözü hatırlatılarak ikinci etkinlikte bu sözü doğrulamaları istenmiştir. Başlangıçta kendilerine sunulan sonlu bir alan vardı. Sonlu alana belli bir kurala göre işlemler uygulandıktan sonra elde bir birimlik alan kalmıştır. Kalan parçada sonlu bir alan tanımlar. Bu sonlu alana karşılık …(üç nokta) getirilerek sonsuzlukla eşleştirilmiştir. Yapılan işlemin sonucu ise sonlu çıkmıştır. Yapılan bu etkinlikler, matematikçileri anlamalarına yardımcı olmuştur.
- Öğrencilere pratiğe dönük doğru bilgi sunulduğunda onlarda kendi yaşamlarından modellerle matematiği anlamaya çalışabilecekleri gözlenmiştir. Örneğin, "Bir hastaya zamana bağımlı olarak verilen serumun damla sayısı, birim zamandaki damla sayısı arttıkça sayılamaz bir hal alır". "Musluktan damla damla akan suyun her bir damlasını yavaş akması halinde sayabilmişler, ancak hızlı akması halinde sayılamaz olmuştur". Yine benzer şekilde "Üzüm bağındaki üzümleri sayarak kümeleri oluşturma yoluna gitmişlerdir".
- Bir kavramın matematiksel modellemesi ile öğrenciye sunulması, onların neyi anlayıp neyi anlamadıklarını analiz etmelerine yardımcı olmaktadır. Öğrencinin kendi bilgisinin kontrolünü yapabilmesi için bu tip uygulamalara daha sık yer verilmelidir.

NOT (NOTICE)

Bu çalışma, 8. Matematik Sempozyumunda (2009) sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Büyüköztürk, Ş., Çakmak E.K., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F., (2009) Bilimsel Araştırma Yöntemleri (3.Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayınları
2. Courant, R. and Robbins, H., (1978). What is Mathematics? Oxford: Oxford University Pres.
3. Çepni, S., (2007). Araştırma ve proje çalışmalarına giriş (3.baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.
4. Dubinsky, W. and McDonald, B., (2005a), Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity:An APOS analysis: Part I Educational Studies in Mathematics, 58(3), 335-359.
5. Dubinsky, W. and McDonald, B., (2005b), Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity:An APOS analysis: Part II Educational Studies in Mathematics, 60(2), 253-266.
6. Fischbein, E. and Baltsan, M., (1999). "The Mathematical Concept of Set and the Collection Model", Educational Studies in Mathematics, 37, 1-22.
7. Fischbein, E., Tirosh, D., and Hess, P., (1979), The intution of infinity. Educational Studies in Mathematics, 10(1),491-512.
8. Gall, M., Borg, W., and Gall, J.P., (1996). Educational Resarch an İntroduction (6. Baskı). USA: Longman Publisher.
9. Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D., (1979), Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Addison-Wesley, A.B.D.

10. Jahnke, H.N., (2001), Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistomological and didactic view. Educational Studies in Mathematics, 48(2/3), 175-197.
11. Minsky, M., 1967), Computation: Finite and Infinite Machines, A.B.D., Prentice-Hall.
12. Moreno, A. and Walldeg, G., (1991), The conceptual evolution of actual infinity. Educational Studies in Mathematics, 22(3), 211-231.
13. Narlı, S. ve Başer,N., (2008), Küme, bağıntı, fonksiyon, konularında bir başarı testi geliştirme ve bu test ile üniversite matematik bölümü 1. Sınıf öğrencilerinin bu konulardaki hazır bulunuşluklarını betimleme üzerine nicel bir araştırma, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi Dergisi 24: 147-158.
14. Nesin, A., Sezgisel kümeler kuramı, Nesin yayınları, Matematiğe giriş kitapları.
15. Royden, H.L., (1968) Real Analysis, New York, Macmillan Publishing Co., Inc.
16. Schwartz, R., (2007), Countable and Uncountable Sets, Springer.
17. Skemp, R.R., (1993), "The Psychology of Learning Mathematics", Penguin Books, England.
18. Stenger, C., Weller, K., Arman, I., Dubinsky, E., and Vidakovic, D.,(2008), A Search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(N), Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, vol 11, numero 001, Comite Latinoamericano de Matematica,93-125,Mexica.
19. Tall, D., (1980), The Notion of infinite measuring number and its relevance in the intution of infinity. Educational Studies in Mathematics,11(3), 271-284.
20. Tirosh, D., (1991), The role of studets' intutions of infinity in teaching the contarion theory. In D. Tall(Ed). Advanced Mathematical Thinking, 199-214. Dodrecht: Kluwer.
21. Tirosh, D., (1999), Finite and infinite sets: Definations and intutions. International Journal of Mathematical Education in Science&Technology, 30(3), 341-349.
22. Tsamir, P., (1999), The transition from comparision of finite to the comparision of infinite sets: Teaching prospective teachers, Educational Studies in Mathematics, 38(1/3), 209-234.
23. Waismann, F., (1959), Introduction to Mathematical Thinking,New York, Harper Torchbooks.
24. Yıldırım, C., (1988), Matematiksel Düşünme, Remzi Kitabevi.