ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2011, Volume: 6, Number: 3, Article Number: 3A0038

PHYSICAL SCIENCES
Received: April 2010
Accepted: July 2011
Series : 3A
ISSN : 1308-7304

Saime Şeyma Danayiyen
Hakan Avcı
Ondokuz Mayis University
saime.danayiyen@omu.edu.tr
Samsun-Turkey

C(X) CEBİRİNDEKİ SPEKTRUM ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Herhangi bir Banach cebiri Y olsun. $f:C(X)\rightarrow Y$ sürekli homomorfizim olmak üzere $C(X)$ deki sıfır bölenlerden faydalanarak f^* adjoint dönüşümünün örten yani $f^*\Delta(Y)=\Delta(C(X))$ olduğunu gösterdik. Bu özellikten $g\in C(X)$ için $\sigma_{C(X)}(g)=\sigma_Y(f(g))$ olduğunu yani spektrumun dönüşümü özelliğinin sağlandığını elde ettik.
Anahtar Kelimeler: Banach Cebiri, Topolojik Sıfır Bölen, Spektrum, Kompleks Homomorfizm, Maksimal İdeal

SPECTRUM PROPERTIES IN C(X) ALGEBRA

ABSTRACT

Let Y be a Banach algebra and $f:C(X)\rightarrow Y$ be a continous homomorphism. We have shown that the adjoint trasformation f^* is surjective by using topological zero divisors in $C(X)$, ie., $f^*\Delta(Y)=\Delta(C(X))$. As a result for $g\in C(X)$, we obtained $\sigma_{C(X)}(g)=\sigma_Y(f(g))$, which implies that spectrum transformation is satisfied.
Keywords: Banach Algebra, Topological Zero Divisor, Spectrum, Complex Homomorphism, Maximal Ideal

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Bu makalede X Banach cebirinin kompleks homomorfizmlerin kümesi $\Delta(X)$, maksimal idealler uzayı $M(X)$ ile göstereceğiz. X Banach cebirinin kompleks homomorfizmleri ile maksimal idealleri arasında 1-1 eşleme vardır.[5,7]

Eğer X birimli Banach cebiri ve $x \neq 0$ olan her $x \in X$ için, $x \in X^{-1}$ ise X ile $\mathbb{C}$ izometrik izomorftur.[5] Bunun sonucu olarak X birimli değişmeli bir Banach cebiri ve her $I \in M(X)$ için X/I ile $\mathbb{C}$ nin izomorf olduğunu söyleriz.[7]

X değişmeli bir normlu cebir olsun. Eğer her $x \in X$ için $xy = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $y \in X$ varsa *x* elemanına X cebirinin sıfır böleni denir.[5] Eğer her $k \in IN$ için $\|y_k\| = 1$ ve $\lim \|xy_k\| = 0$ olacak şekilde (y_k) dizisi varsa x elemanına topolojik sıfır bölen denir. Ayrıca x topolojik sıfır bölen ise $x \notin X^{-1}$ ve $x \in \partial X^{-1}$ ise x topolojik sıfır bölendir.[5,7]

X birimli Banach cebiri ve $x \in X$ olsun.

$$\sigma_X(x) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, (x - \lambda.1) \in X^{-1}\right\} \tag{1}$$

kümesine x elemanının X *c*ebirindeki spekturumu; $\mathbb{C} - \sigma_X(x)$ kümesine x elemanının rezolventi;

$$r_X(x) = \sup\left\{|\lambda| \,\middle|\, \lambda \in \sigma_X(x)\right\} \tag{2}$$

sayısına da x elemanının spektral yarıçapı denir.[5,7] Ayrıca $r_X(x) = \lim \|x^n\|^{1/n}$ olarak ifade edilir.[5]

X ve *Y* birimli Banach cebiri $f : X \to Y$ sürekli bir homomorfizim olsun. Bu homomorfizmin adjointi $f^* : Y^* \to X^*$, $\psi \in Y^*$ için

$$f^*\psi : X \to \mathbb{C}, (f^*\psi)(x) = \psi(f(x)) \tag{3}$$

şeklindedir.

Eğer $x \in X$ için $\sigma_X(x) = \sigma_Y(\psi(x))$ oluyorsa, bu eşitliğe spekturumun dönüşümü özelliği sağlanır denir.[5]

Corach-Suarez [3]; f^* dönüşümünün örten olması ve spektrum dönüşümü özelliğinin sağlanması durumunu incelemiştir. Yine Akay, H. - Argün, Z. [1]; yaptıkları çalışmada T, A cebirinde bir çarpan operatörü ve $\Delta(A)$, A cebirinin Gelfand spektrumunu göstermek üzere $\Delta(A)$ ile $\Delta(\hat{T})$ kümeleri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

$\psi : C(X) \to Y$ homomorfizim olmak üzere $\Delta(C(X))$ ile $\psi^*\Delta(Y)$ kümelerinin eşit olma durumu araştırılmıştır. Bunun sonucu olarak spektrumun dönüşümü özelliğinin sağlandığı elde edilmiştir.

3. C(X) CEBİRİNDE MAKSİMAL İDEALLERİN DÖNÜŞÜMÜ (TRANSFORMATION OF MAXIMAL IDEALS IN C(X) ALGEBRA)

X kompakt uzay, Y birimli değişmeli herhangi bir Banach cebiri olmak üzere $f : C(X) \to Y$ sürekli homomorfizminden elde edilen

$f^*:\Delta(Y)\to\Delta(C(X))$ adjoint dönüşümünün hangi koşullar altında örten olduğunu inceledik.

Teorem 3.1: X ve Y birimli değişmeli Banach cebiri olmak üzere $f^*\Delta(Y)\subset\Delta(X)$ dir.

İspat: Herhangi bir $\psi\in\Delta(Y)$ ve $x_1,x_2\in X$ alalım.

$$(f^*\psi)(x_1,x_2)=\psi(f(x_1,x_2))=\psi(f(x_1)).\psi(f(x_2))=f^*\psi(x_1).f^*\psi(x_2) \tag{4}$$

olup

$$f^*\psi\in\Delta(X) \tag{5}$$

Böylece

$$f^*\Delta(Y)\subset\Delta(X) \tag{6}$$

elde edilir.

Teorem 3.2: Y herhangi bir Banach cebiri, $X=[0,1]$ olmak üzere $\psi:C(X)\to Y$, $\psi(1)=1$ şartını sağlayan sürekli bir ψ homomorfizmi verilsin. Yine $\varphi\in\Delta(C(X))$ için $\psi(\text{Çek}\varphi)\subset J$ olacak şekilde Y cebirinden farklı bir J ideali var olsun. Eğer her $f\in C(X)$ için $r_{C(X)}(f)=r_Y(\psi(f))$ oluyorsa $\psi^*\Delta(Y)=\Delta(C(X))$ olur.

İspat: Herhangi bir $\varphi\in\Delta(C(X))$ alalım. $I=\text{Çek}\varphi$ olacak şekilde $I\in M(C(X))$ maksimal ideali vardır. Y cebirinin $\psi(I)$ yi kapsayan en küçük ideali J olsun. Eğer $J\neq Y$ ise $J\subset J_1$ olacak şekilde $J_1\in M(Y)$ vardır. Buradan $J_1=\text{Çek}\varphi_1$, $\varphi_1\in\Delta(Y)$ yazılır. Gelfand-Mazur teoreminden $f\in C(X)$ için $f=\lambda.1+y$ olacak şekilde $\lambda\in\mathbb{C}$, $y\in Y$ vardır. Buradan;

$$\langle\psi^*\varphi_1,f\rangle=\langle\psi^*\varphi_1,\lambda.1+y\rangle=\lambda \tag{7}$$

olur. Böylece;

$$f=\langle\psi^*\varphi_1,f\rangle.1+y \tag{8}$$

$$\varphi(f)=\langle\psi^*\varphi_1,f\rangle.\varphi(1)+\varphi(y)=\langle\psi^*\varphi_1,f\rangle \tag{9}$$

bulunur. Burada Teorem 1 kullanılırsa

$$\Delta(C(X))=\psi^*\Delta(Y) \tag{10}$$

elde edilir. Şimdi $J=Y$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{N}y_i\,\psi(f_i)=1 \tag{11}$$

olacak şekilde $f_i\in I, y_i\in Y, (i=1,...,N)$ vardır. $f_1,f_2,...,f_N$ singüler olup $C(X)$ de topolojik sıfır bölendir. Böylece $(g_{(n)}^{(1)})\subset C(X)$ dizileri elde ederiz ki her $n\in IN$ için $\|g_n^{(i)}\|=1$ ve $\|f_i g_n^{(i)}\|\to 0\ (i=1,...,N)$ olur. $g_n=g_n^{(i)}.g_n^{(2)}.....g_n^{(N)}$ olarak alınırsa

$$\|g_n\|=1,\ \|f_i.g_n\|\to 0 \tag{12}$$

olduğu görülür. Böylece her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_0$ olduğunda $\|f_i . g_n\| < \frac{\varepsilon}{\|\psi\|}$ olacak şekilde $n_0 \in IN$ vardır. Buradan

$$\|\psi(f_i . g_n)\| \to 0 \qquad (13)$$

elde edilir. Öte yandan $\sum_{i=1}^{N} y_i \psi(f_i) = 1$ olduğu kullanırsa

$$\psi(g_n) = \psi(g_n)\sum_{i=1}^{N} y_i \psi(f_i) = \sum_{i=1}^{N} y_i \psi(f_i). \psi(g_n) = \sum_{i=1}^{N} y_i \psi(f_i . g_n) \qquad (14)$$

$$\|\psi(g_n)\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} y_i \psi(f_i . g_n)\right\| \leq \sum_{i=1}^{N} \|y_i\|.\|\psi(f_i . g_n)\| \qquad (15)$$

olarak bulunur. Böylece $\|\psi(f_i g_n)\| \to 0$ olduğundan $\|\psi(g_n)\| \to 0$ elde ederiz. Her $\varepsilon > 0$ için $g_n = g_n^{(i)} . g_n^{(2)} . \ldots . g_n^{(N)}$ olarak alınırsa $\|\psi(g)\| < \varepsilon$ olduğundan $r_Y(\psi(g)) < \varepsilon$ olur. Yine $\varphi \in \Delta(C(X))$ için $g_{n_0}^{(i)} \neq 0$ olup $g_{n_0}^{(i)}(\varphi) = \varphi(g_{n_0}^{(i)}) \neq 0$ olacaktır. Buradan $\varphi(g_{n_0}^{(i)}) = \delta_i$, $i = 1,2,\ldots,N$ ve $s = |s_1 s_2 \ldots s_N|$ olarak alırsak $|\varphi(g)| = s > 0$ ve $r_{C(X)}(g) \geq s$ bulunur. Bu durum $0 < \varepsilon < s$ için $\varepsilon > r_Y(\psi(g)) = r_{C(X)}(g) \geq s$ olması ile çelişir. O halde $J \neq Y$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Böylece ψ^* dönüşümü, Y'nin maksimal ideal uzayını C(X)'nin maksimal ideal uzayına dönüştürdüğünü elde ederiz.

4. C(X) CEBİRİNDE SPEKTRUM DÖNÜŞÜMÜ (SPECTRUM TRANSFORMATION IN C(X) ALGEBRA)

Teorem 4.1: Y, C(X) Banach cebirinin birimini içeren bir alt cebir olsun. Bir $f \in Y$ için, eğer f fonksiyonu C(X) Banach cebirinin regüler bir elemanı olduğunda, f fonksiyonu Y alt cebirinin de regüler bir elemanı oluyor ise her $h \in Y$ için $\sigma_Y(h) = \sigma_{C(X)}(h)$ olur.

İspat: Herhangi bir $h \in Y$ ve herhangi bir $\lambda \in \rho_{C(X)}(h)$ alalım. Buradan $h - \lambda.1 \in [C(X)]^{-1}$ ve $h - \lambda.1 \in Y$ olduğundan hipotez gereği $h - \lambda.1 \in Y^{-1}$ olur. Böylece $\rho_{C(X)}(h) \subset \rho_Y(h)$ bulunur [5]. Bunun sonucu olarak;

$$\sigma_Y(h) = \sigma_{C(X)}(h) \qquad (16)$$

elde ederiz.

Teorem 4.2: Y, C(X) Banach cebirinin birimini içeren regüler alt cebiri olsun. $f \in Y$ için f , C(X) Banach cebirin de regüler ise f,Y cebirininde regüler bir elemanıdır.

İspat: Her $\varphi_1 \in \Delta(Y)$ için $\varphi_1 = \varphi|_Y$ olacak şekilde $\varphi \in \Delta(C(X))$ vardır. Buradan $f \in Y$ için

$$\varphi_1(f) = \varphi|_Y(f) = \varphi(f) \neq 0 \qquad (17)$$

olup f,Y cebirinin regüler elemanıdır.

Teorem 4.3: Y birimli bir Banach cebiri ve $\psi : C(X) \to Y$ sürekli bir homomorfizm olsun. Eğer $\psi^{*}\Delta(Y) = \Delta(C(X))$ ise her $f \in C(X)$ için $\sigma_Y(\psi(f)) = \sigma_{C(X)}(f)$ olur. Yani spektrumun dönüşümü özelliği sağlanır.

İspat: Her $f \in C(X)$ için $\langle \psi^{*}\varphi_1, f \rangle = \langle \varphi, f \rangle$ ayrıca

$$\sigma_Y(\psi(f)) = \{\varphi_1(\psi(f)) \mid \varphi_1 \in \Delta(Y)\} \tag{18}$$

$$\sigma_{C(x)}(f) = \{\varphi(f) \mid \varphi \in \Delta(C(X))\} \tag{19}$$

İfadeleri yazılır. Buradan (18) ve (19) kullanılırsa;

$$\sigma_Y(\psi(f)) = \sigma_{C(x)}(f) \tag{20}$$

bulunur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER (CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS)

Bir Banach cebiri $C(X)$ ve Y herhangi Banach cebiri olmak üzere $\Delta(C(X))$ ile $\psi^{*}\Delta(Y)$ kümelerinin eşit olduğu elde edilmiştir. Bundan yararlanarak spektrumun dönüşümü özelliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Buradaki Banach cebirleri değiştirilerek aynı problem incelenebilir. Yine ψ üzerindeki koşullar değiştirilerek maksimal ideallerin nasıl dönüşeceği araştırılabilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Akay, H. ve Argün, Z., (2005), Değişmeli Banach Cebirlerinin Gelfand Spektrumları Üzerine, Cilt:13, Kastamonu Eğitim Dergisi, No:2, 547-554
2. Conway, J.B., (1985), A course in Functional Analysis, Springer Verlang, Newyork
3. Corach, G. ve Suarez, F.D., (1987), Extension of Charecters in Commutative Banach Algebras, 199-202
4. Gelfand, I., Roikov, D., and Shilov, G., (1964), Commutative Normed Rings, Chelsea Publishing Company, Brenx Newyork
5. Larsen, R., (1973), Banach Algebras, Marcel Dekker, İnc. New York,
6. Larsen, R., (1973), Functional Analysis, Marcel Dekker, İnc. New York
7. Rudin, W., (1973), Functional Analysis, Mc.Graw-Hill Book Company
8. Rudin, W., (1974), Real and Complex Analysis, Mc. Graw-Hill İnc., New York