ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2011, Volume: 6, Number: 3, Article Number: 3A0039

PHYSICAL SCIENCES
Received: May 2011
Accepted: July 2011
Series : 3A
ISSN : 1308-7304

Hakan Avcı
Ondokuz Mayis University
hakanav@omu.edu.tr
Samsun-Turkey

$A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ UZAYININ BAZI ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Bu makalede G lokal kompakt bir Abel grubu olmak üzere bir $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayı tanımlandı. Daha sonra bu uzay bir norm ile donatılarak, bu norma göre bir Banach uzayı olduğu gösterildi. Ayrıca S, G üzerinde tanımlı basit fonksiyonların kümesi olmak üzere $B(S\otimes_{\gamma} S)$ kümesinin $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayında her yerde yoğun olduğu gösterildi. Yine indislerin değişmeleri durumunda $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzaylarının kapsama özellikleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Lorentz Uzayı, Banach Uzayı, Tensör Çarpımları, Dağılım Fonksiyonu, Girişim

ON SOME PROPERTİES OF $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ SPACE

ABSTRACT

In this study, an $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ space is defined by supposing that G is local compact Abel group. This space is normed and it is, then showed that the space is a Banach space. Let S be the set of simple functions defined on G. It is prove that $B(S\otimes_{\gamma} S)$ is dense in $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$. Also, inclusion properties of $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ space are investigated by using variaton of indices.

Keywords: Lorentz Space, Banach Space, Tensor Products, Distribution Function, Convolution.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

X ve Y, F (F=IR veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde iki normlu uzay ve X' ve Y' de sırasıyla X ve Y nin topolojik dualleri olsunlar. $X'xY'$ uzayından F cismine giden bütün sınırlı, bilineer fonksiyonların Banach uzayını $BL(X',Y';F)$ ile gösterelim. Herhangi $x\in X$, $y\in Y$ elemanları için bir $x\otimes y$ ifadesi $f\in X'$, $g\in Y'$ olmak üzere

$$(x\otimes y)(f,g)=f(x)g(y) \tag{1}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde

$$\{x\otimes y \mid x\in X, y\in Y\} \tag{2}$$

kümesi tarafından gerilen vektör uzayına X ve Y uzaylarının cebirsel tensör çarpımı denir. Bu tensör çarpımı $X\otimes Y$ simgesiyle gösterilir[2]. *X* ve Y normlu uzaylar olmak üzere $X\otimes Y$ cebirsel tensör çarpımı üzerine projektif tensör norm olarak adlandırılan

$$\gamma(t)=\mathrm{Inf}\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\| \;\middle|\; t=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i, x_i\in X, y_i\in Y, i=1,\dots,n\right\} \tag{3}$$

normunu koyalım. $X\otimes Y$ uzayının bu norma göre tamlamasına (completion) *X* ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımı denir ve $X\otimes_{\gamma}Y$ ile gösterilir. $X\otimes_{\gamma}Y$ Uzayının her t elemanı $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\|y_i\|<\infty$ olmak üzere $t=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\otimes y_i$ biçiminde olup $\gamma(t)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\|y_i\|$ toplamlarının infimumudur [2].

G bir lokal kompakt Abel grubu, μ de G üzerinde tanımlı bir Haar ölçümü olmak üzere bir (G,μ) ölçüm uzayı verilsin. f fonksiyonu G üzerinde tanımlı ölçülebilir karmaşık değerli bir fonksiyon olmak üzere bir λ_f fonksiyonunu her $y>0$ için

$$\lambda_f(y)=\mu\left\{x\in G \mid |f(x)|>y\right\} \tag{4}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyona f fonksiyonunun dağılım(distribution) fonksiyonu denir. Ayrıca her $t>0$ olmak üzere

$$f^*(t)=\mathrm{Sup}\{y>0 \mid \lambda_f(y)>t\}=\mathrm{Inf}\{y>0 \mid \lambda_f(y)\le t\} \tag{5}$$

şeklinde tanımlanan f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun rearrangementi denir. Yine her $t>0$ için

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \tag{6}$$

biçiminde tanımlanan f^{**} fonksiyonuna f fonksiyonunun ortalama (avaraj) fonksiyonu adı verilir. Bu λ_f, f^* ve f^{**} fonksiyonlarının; negatif olmayan, artmayan ve sağdan sürekli fonksiyonlar olduğu biliniyor [1,4]. Tanımlanan bu fonksiyonlardan yararlanarak,

$$\|f\|^*_{(p,q)}=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^{\infty}t^{\frac{q}{p}-1}\left[f^*(t)\right]^q d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<p,q<\infty\\ \mathrm{Sup}_{t>0}\, t^{\frac{1}{p}}f^*(t), & 0<p\le\infty, q=\infty\end{cases} \tag{7}$$

Olmak üzere $\|f\|^{*}_{(p,q)} < \infty$ olan f fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) vektör uzayı Lorentz uzayı olarak bilinir ve $L(p,q)(G)=L(p,q)$ şeklinde gösterilir. Bu uzay üzerinde

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\left[f^{**}(t)\right]^q d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} & , \quad 0<p,q<\infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & , \quad 0<p\le\infty, q=\infty \end{cases} \tag{8}$$

şeklinde tanımlanan $\|\ \|_{(p,q)}$ fonksiyonu bir norm olup $1<p<\infty, 1\le q<\infty$ olmak üzere $L(p,q)(G)$ uzayı bu norma göre bir Banach uzayıdır [4,5,8].

$1\le p_1, p_2, q_1, q_2 \le \infty$ olmak üzere $f\in L(p_1,q_1)$, $g\in L(p_2,q_2)$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1=\frac{1}{r}$ ve $s\ge 1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere $\frac{s}{q_1}+\frac{s}{q_2}\ge 1$ koşulları sağlansın. Bu takdirde $L(p_1,q_1)XL(p_2,q_2)$ uzayından $L(r,s)$ uzayına bir b bilineer dönüşümüne karşılık

$$B(f\otimes g)=\tilde{f}*g, \quad \|B\|\le 3r \tag{9}$$

olacak şekilde $L(p_1,q_1)\otimes_\gamma L(p_2,q_2)$ uzayından $L(r,s)$ uzayına giden bir tek B doğrusal dönüşümü karşılık gelir [2].G üzerinde tanımlı Basit fonksiyonların kümesini S ile gösterirsek,

$$B(S\otimes_\gamma S)=\left\{ t=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{s}_i * k_i \,\middle|\, s_i, k_i \in S, \sum_{i=1}^{\infty}\|s_i\|_{(p_1,q_1)}\|k_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty \right\} \tag{10}$$

biçiminde olur.

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Bu makalede $L^p(G)$ uzayından daha genel olan $L(p,q)$ Lorentz uzaylarının projektif tensör çarpımlarından yararlanarak yeni bir $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayı tanımlanmış ve bu uzayın Banach uzayı olduğu gösterilmiştir.

3. $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ UZAYI

3.1.Tanım: *B* doğrusal dönüşümü altında $L(p_1,q_1)\otimes_\gamma L(p_2,q_2)$ uzayının görüntüsünü $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ ile gösterelim. Böylece $f_i\in L(p_1,q_1)$, $g_i\in L(p_2,q_2)$ ve $B\left(\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i\otimes g_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i$ olmak üzere

$$A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)=\left\{ h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty \right\} \tag{11}$$

olur. Bu uzay üzerinde

$$|||h||| = \mathop{\dot{I}nf}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)} \,\middle|\, h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i \right\} \tag{12}$$

olarak tanımlanan $|||\ |||$ fonksiyonu bir normdur. Böylece $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayı bir normlu uzaydır.

3.1.Teorem: $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayı $|||\ |||$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayından herhangi bir $(h_n)_{n\in IN}$ *Cauchy* dizisi alalım. Bu durumda (h_n) dizisinin

$$|||\, k_{n+1}-k_n\, ||| < \frac{1}{2^n}\ ,\ n=1,2,\cdots \tag{13}$$

olacak şekilde bir (k_n) alt dizisi vardır. $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayının ve $|||\ |||$ normun tanımı göz önüne alınırsa,

$$\textbf{(i)}\ k_1=\sum_{j=1}^{\infty} f_{1_j} * g_{1_j} \tag{14}$$

$$\textbf{(ii)}\ \sum_{j=1}^{\infty}\left\| f_{1_j}\right\|_{(p_1,q_1)}\left\| g_{1_j}\right\|_{(p_2,q_2)} < |||\, k_1\, ||| +1 \tag{15}$$

$$\textbf{(iii)}\ k_{n+1}-k_n=\sum_{j=1}^{\infty} f_{n+1_j} * g_{n+1_j} \tag{16}$$

$$\textbf{(iv)}\ \sum_{j=1}^{\infty}\left\| f_{n+1}\right\|_{(p_1,q_1)}\left\| g_{n+1}\right\|_{(p_2,q_2)} < \frac{1}{2^{n-1}},\ ,n=1,2,... \tag{17}$$

Olacak şekilde $(f_{n_j})\subset L(p_1,q_1)$, $(g_{n_j})\subset L(p_2,q_2)$ alt dizileri vardır [3].

Buradan, $h=\sum_{j=1}^{\infty} f_{1_j} * g_{1_j}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_{n+1_j} * g_{n+1_j}\right)$ olarak alınırsa

$|||h||| < |||k_1||| +3<\infty$ olup $h\in A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ olur. Yine $\sum_{r=1}^{n}\left(k_{r+1}-k_r\right)=k_{n+1}-k_1$ olduğu kullanılırsa

$$|||\, h-k_{n+1}\, |||=\left|\left|\left|\ h-\left(k_1+\sum_{r=1}^{n}(k_{r+1}-k_r)\right)\right|\right|\right| < \sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{r-1}} \tag{18}$$

bulunur. Öte yandan $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r-1}}$ serisi yakınsak olduğundan her $\varepsilon>0$ sayısı ve $n\geq n_0(\varepsilon)$ olduğunda (18) ifadesinden $|||h-k_{n+1}||| < \varepsilon$ elde ederiz. Bu sonucu kullanarak

$$|||\, k_n-h\, |||=|||\, k_n-k_{n+1}+k_{n+1}-h\, ||| < \frac{1}{2^n}+\varepsilon \tag{19}$$

bulunur. Böylece (k_n) alt dizisinin $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayında h elemanına yakınsar. O halde (h_n) Cauchy dizisi de $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayında h elemanına yakınsar. Yani $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayı $|||\ |||$ normuna göre Banach uzayıdır.

3.2.Teorem: $B(S\otimes_{\gamma} S)$ kümesi $|||\ |||$ normuna göre $A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayında her yerde yoğundur.

İspat: Herhangi bir $h\in A^{p_2,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ alalım. Buradan

$\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i * g_i$ serisi yakınsak olduğundan $h_n=\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i * g_i$ denilirse verilen her $\varepsilon>0$ sayısı ve $n\geq n_0$ olduğunda

$$|||h-h_n|||<\frac{\varepsilon}{3} \tag{20}$$

olacak şekilde $n_0\in IN$ vardır. Bir v_0 sayısını $v_0\geq n_0$ alıp sabitleştirelim.

$$C_1=\underset{1\leq i\leq v_0}{Max}\left\{\|g_i\|_{(p_2,q_2)}\right\} \tag{21}$$

denirse $\overline{S}=L(p_1,q_1)$ [4] olduğundan

$$\|f_i-s_i\|_{(p_1,q_1)}<\frac{\varepsilon}{3v_0C_1} \tag{22}$$

olacak şekilde $s_i\in S$ vardır. Yine

$$C_2=\underset{1\leq i\leq v_0}{Max}\left\{\|s_i\|_{(p_1,q_1)}\right\} \tag{23}$$

olarak alınırsa

$$\|g_i-k_i\|_{(p_2,q_2)}<\frac{\varepsilon}{3v_0C_2} \tag{24}$$

olacak şekilde $k_i\in S$ vardır. Buradan $\sum_{i=1}^{v_0}\tilde{s}_i * k_i\in B(S\otimes_{\gamma}S)$ olup eğer (20), (21), (22), (23) ve (24) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left|\left|\left| h-\sum_{i=1}^{v_0}\tilde{s}_i * k_i\right|\right|\right| = \left|\left|\left| h-h_{v_0}+h_{v_0}-\sum_{i=1}^{v_0}\tilde{s}_i * g_i+\sum_{i=1}^{v_0}\tilde{s}_i * g_i-\sum_{i=1}^{v_0}\tilde{s}_i * k_i\right|\right|\right| <\varepsilon \tag{25}$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

3.3.Teorem: Kabul edelim ki $p_1=m_1, p_2=m_2$ ve $1\leq q_1\leq n_1\leq\infty$, $1\leq q_2\leq n_2\leq\infty$ olsun. Bu takdirde $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)\subset A_{m_1,n_1}^{m_2,n_2}(G)$ olur.

İspat: Herhangi bir $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ alalım. Buradan $p_1=m_1, q_1\leq n_1$ olduğundan $L(p_1,q_1)\subset L(m_1,n_1)$ ve yine $p_2=m_2, q_2\leq n_2$ için $L(p_2,q_2)\subset L(m_2,n_2)$ ve bunların sonucu olarak $\|f_i\|_{(m_1,n_1)}\leq\|f_i\|_{(p_1,q_1)}$, $\|g_i\|_{(m_2,n_2)}\leq\|g_i\|_{(p_2,q_2)}$ olur. [4] Buradan da

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(m_1,n_1)}\|g_i\|_{(m_2,n_2)}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}$$ eşitsizliği elde edilir.

Böylece $h\in A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ bulunur. Bu ise istenendir.

3.4.Sonuç: 3.3.Teoremin hipotezleri altında $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)=A_{m_1,n_1}^{m_2,n_2}(G)$ olması için gerekli ve yeterli şart $q_1=n_1, q_2=n_2$ olmasıdır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER (CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS)

Bu makalede p=q olması durumunda özel olarak $L^p(G)$ uzayını veren $L(p,q)(G)$ Lorentz uzaylarının projektif tensör çarpımlarını kullanarak yeni bir $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayı tanımlanmıştır. Bu uzay $|||\ |||$ normu ile donatılarak Banach uzayı olduğu gösterilmiştir. Yine indislerin değişmeleri durumunda $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzaylarının kapsama özellikleri incelenmiştir. $L(p,q)(G)$ Lorentz uzayında yapılan birçok çalışma buradaki $A_{p_1,q_1}^{p_2,q_2}(G)$ uzayı üzerinde incelenebilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Blozinski, A.P., (1972). On a convolution Theorem for $L(p,q)$ spaces, Trans. of the Amer. Math. Society Volume: 164, pp.255-265.
2. Bonsall, F.F. and Duncan, J., (1973). Complete normed algebras, Springer- Verlag, Belin, Heidelberg, New- York.
3. Gaudry, G.I., (1965). Quasimeasures and operators commuting with convolution, Pacific Journal of Mathematics Volume: 13, Number: 3, pp: 461-476.
4. Hunt, R.A., (1966). On $L(p,q)$spaces[1], Extrait de L' Enseignement Mathematique, T. XII, Fasc : 4, pp :249-277.
5. O' neil, R., (1963). Convolution operators and $L(p,q)$spaces, Duke Math. j. 30 pp: 129-142.
6. Rieffel, M.A., (1967). Induced Banach representation of Banach algebras and locally compact groups, Journal of Functional Analysis, 1, pp: 443-491.
7. Avcı, H. ve Gürkanlı, A.T., (2007). Multipliers and tensor product of $L(p,q)$Lorentz spaces, Acta Mathematica Scientia, Volume:27, Series.B, pp: 107-116.
8. Saeki, S. ve Thome, E.L., (1994). Lorentz spaces as L_1 modules and multipliers, Hokkaido Math. J., Volume: 23, pp: 55-92.
9. Yap, L.Y.H., (1969). Some remarks on convolution operators and $L(p,q)$ spaces, Duke Math. J. Volume: 36, pp: 647-658.